

Massefunksjonen for galaksehoper, nøytrinomasser og inflasjon

Haakon Aarflot



Oppgave skrevet for graden
Master i Astronomi

Institutt for teoretisk astrofysikk
Universitetet i Oslo

Juni 2008

Takk

Først av alt vil jeg gi en stor takk til veilederen min Øystein Elgarøy for å introdusere meg til dette feltet og for god veiledning gjennom mastergraden. For hans gode råd og for alltid å være behjelpelig og tilgjengelig. En takk går også til Jostein Riiser Kristiansen for all hjelpen jeg har fått med programmering og CosmoMC.

I tillegg vil jeg takke Håkon Dahle for de observerte og simulerte dataene og for den gode hjelpen. Takk for at jeg fikk være med å observere på det nordiske optiske teleskop. Det var litt av en opplevelse.

Jeg vil også takke Jan Lindroos for hans nysgjerrighet i oppgaven min og Ole Kristian Åsland for gode råd.

Til slutt vil jeg takke resten av vennene mine og familien for at de bryr seg, og for en flott tid utenom skolen!

Innhold

1	Introduksjon	1
2	Nøytrinoer og masse	3
2.1	Nøytrinotyper	3
2.2	Nøytrinooscillasjoner	4
2.3	Resultat fra eksperimenter	5
2.3.1	Atmosfærenøytrinoer	5
2.3.2	Solare nøytrinoer	5
2.3.3	Oppsummering	6
2.4	Finne den absolutte nøytrinomassen	6
3	Kosmologi	8
3.1	Notasjon	8
3.2	Einsteins feltlikninger	9
3.2.1	Einsteintensoren $G_{\mu\nu}$	9
3.2.2	Energi-impulstensoren	10
3.3	Friedmannlikningene	11
3.4	Det tidlige Univers	13
3.4.1	Inflasjon	14
3.4.2	Skalarfelt i kosmologi	15
3.4.3	Tider etter inflasjonsfasen og nøytrinoenes rolle	16
3.4.4	Dannelsen av CMB	17
3.5	Kosmologiske observasjoner	17
3.5.1	CMB-målinger	17
3.5.2	Observasjoner av storskalastrukturen	19
4	Perturbasjonsteori	21
4.1	Boltzmannlikningen	21
4.1.1	Boltzmannlikningen for massive nøytrinoer	23
4.2	De perturberte Einsteinlikningene	26
4.2.1	Den perturberte Einsteinlikningen for tidkomponenten	26
4.2.2	Den perturberte Einsteinlikningen for romkomponentene	27
4.3	Skalarfeldtperturbasjonene i inflasjonsfasen	28
4.4	Løsninger av perturbasjonslikningene	29
4.5	Den flate Λ CDM-universmodellen	29
4.5.1	Strålingsdominert fase	30

4.5.2	Materiedominert fase	30
4.5.3	Λ -dominert fase	31
4.6	Massive nøytrinoer og strukturformasjon	31
4.6.1	Effekten av nøytrino "free streaming"	31
5	Parameterestimering	34
5.1	Likelihoodfunksjonen	34
5.2	CosmoMC	35
6	WMAP-data og nøytrinomassen	38
6.1	Reduserte CMB-observasjoner	38
6.2	Analytisk studie av effekten av massive nøytrinoer	39
6.3	Spektralindeksens påvirkning på WMAP	42
6.4	Numeriske resultater fra WMAP	43
7	Massefunksjonen for galaksehoper	46
7.1	Galaksehoper	46
7.2	Å finne massefunksjonen for galaksehoper fra svak gravitasjonslensing	48
7.2.1	Volum til målingsområdet	49
7.2.2	Beregne masser til Galaksehoper	49
7.2.3	Masse-røntgenstråling forholdet	52
7.2.4	Måleusikkerheter	52
7.2.5	Tilpasse data til forutsatt massefunksjon	53
7.3	Massefunksjonen og WMAP	53
7.3.1	Uttrykke χ^2 ut fra Håkon Dahles data	53
7.3.2	Numeriske resultat	54
7.4	Forbedre massefunksjonen	56
7.4.1	Matematisk	56
7.4.2	Håkon Dahles simulering av en forbedret massefunksjon	58
8	Oppsummering	63
A	Matlab kode for punktplot av data	65
B	c++ kode for å oppdatere datafiler ved å lese av data direkte	67
C	c++ kode for å oppdatere datafiler ved hjelp av en funksjon	71

Kapittel 1

Introduksjon

Målet med denne oppgaven er å kombinere WMAP-dataene for temperaturvariasjonene i bakgrunnstrålingen med Håkon Dahles bestemmelse av massefunksjonen for galaksehoper [1] til å bestemme kosmologiske parametre og nøytrinomassen i Λ CDM-modellen. Jeg vil spesielt se på hvordan parametrene som er tilknyttet inflasjonsfasen endrer seg, samt å se på hvordan en forbedret bestemmelse av massefunksjonen kan gi bedre føringer på nøytrinomasser og inflasjon.

De siste årenes observasjoner av nøytrinofluksen fra solen, kosmisk stråling og reaktorer viser at nøytrinoene har masse. Vi vet imidlertid ikke hvor stor massene er, bare at summen av dem høyst er 6 eV . Men siden nøytrinoene ble produsert i store mengder i det tidligere univers, og er de nest mest tallrike partiklene i universet, vil selv en så liten masse bety at de utgjør en vesentlig del av den totale energitettheten i universet. Temperaturvariasjonene i den kosmiske bakgrunnstrålingen og fordelingen av materie i universet er følsomme for nøytrinomassene, og det er derfor viktig å ta høyde for nøytrinomassen når man bruker kosmologiske observasjoner til å bestemme parametre i Λ CDM-modellen.

Det jeg i hovedsak skal gjøre i denne oppgaven er å sammenlikne observerte data med teoretiske modeller ved hjelp av programpakken CosmoMC. Ut fra dette skal jeg kunne bestemme de forskjellige parametrene med gitte usikkerheter. De observerte dataene jeg skal bruke, WMAP og Håkon Dahles data, er begge gode målinger på kosmologisk data. WMAP-målingene av fluktuasjonene til bakgrunnstrålingen er kanskje de sikreste kosmologiske observasjonene vi har i dag. Dette er fordi det er godt forstått hvordan man går fra observasjoner til den underliggende kosmologiske modellen. Den store fordel med å bruke Håkon Dahles bestemmelse av massefunksjonen er at man ikke trenger å anta hvordan den baryonske materien klumper seg relativt til den mørke materien, slik det er nødvendig å gjøre når man bruker observable som for eksempel styrkespekteret til fordelingen av galakser.

Oppgaven er i hovedsak delt inn i to deler. Første del går gjennom den nødvendige fysikken jeg vil bruke. I kapittel 2 ser jeg på nøytrinoer og rettferdiggjør hvorfor de har masse. Deretter vil jeg i kapittel 3 gå gjennom grunnleggende kosmologi hvor jeg viser hvilken rolle massive nøytrinoer har i universet. Videre vil jeg i kapittel 4 ta for meg perturbasjonsteori som er viktig for å forstå hvorfor nøytrinoer og andre parametre oppfører seg som de gjør. Etter dette vil jeg i kapittel 5 forklare hvordan programpakken CosmoMC fungerer.

I andre del av oppgaven ser jeg på hvilke føringer jeg kan forvente av de forskjellige dataene jeg skal bruke, samt å gjennomgå mine egne resultater. I kapittel 6 vil jeg bruke dataene fra WMAP-målingene og se hvilken føring jeg får på nøytrinomassen, samt se hvordan nøytri-

noer med masse påvirker de andre parametrene. Videre vil jeg i kapittel 7 forklare hvordan Håkon Dahle kom frem til sin bestemmelse av massefunksjonen, samt å finne en funksjon som beskriver denne slik at jeg kan bruke den til praktiske formål. Denne funksjonen vil jeg bruke i kombinasjon med WMAP-målingene for å finne bedre føringer på de forskjellige parametrene. Jeg vil til slutt forsøke å se litt frem i tid å se hva vi egentlig kan forvente oss av en forbedret massefunksjon ved hjelp av undersøkelser av simulerte data.

Kapittel 2

Nøytrinoer og masse

Mye av min masteroppgave går ut på å se på relasjoner mellom kosmologiske observasjoner og nøytrinomassene. I dette kapittelet vil jeg gå gjennom den teoretiske bakgrunnen til massive nøytrinoer, og noen av de eksperimentene som viser at de har masse. Jeg vil i hovedsak bygge kapittelet på [2], [3], [4] og [5].

2.1 Nøytrinotyper

Nøytrinoer hører til familien av partikler kalt leptoner. Dette er en familie av fermioner som er adskilt fra den andre familien av fermioner, nemlig kvarkene. Leptoner er partikler med spinn $1/2$ og erfarer ikke den sterke vekselvirkningen, det vil si kreftene som binder sammen kvarkene. Nøytrinoer er elektrisk nøytrale leptoner og erfarer heller ikke elektromagnetiske krefter. Siden de vekselvirker svakt, kan de bare bli observert indirekte i prosesser hvor ladde partikler blir produsert. Det er typisk at energien, bevegelsesmengden og spinnet som blir tatt bort eller gitt av nøytrinoet blir funnet ved å måle de andre partiklene som er involvert i reaksjonen, samt å bruke bevaringslovene. Vi har tre forskjellige typer nøytrinoer som hver er assosiert med forskjellige reaksjoner:

* Elektron-nøytrinoet ν_e , assosiert med elektroner som oppstår eller blir annhilert.

* Muon-nøytrinoet ν_μ , som over, men med myonet.

* Tau-nøytrinoet ν_τ , som over, men med tau-leptonet.

Her er ν nøytrinoets bølgefunksjon, som gir sannsynligheten for at det kvantemekaniske systemet skal befinne seg i et område ved en gitt tid.

For en gitt nøytrinotype er masseleddet i Lagrangetettheten gitt som $\mathcal{L} = -m\bar{\nu}\nu$, hvor $\bar{\nu} = \nu^\dagger \gamma^0$, der ν^\dagger er den konjugerte bølgefunksjonen og γ^0 er en matrise definert i [4]. Uttrykker vi dette ved hjelp av chiralfelt definerer vi en venstre og en høyre projeksjonsoperator P_V og P_H gitt som

$$P_V = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \quad \text{og} \quad P_H = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5). \quad (2.1.1)$$

Ut fra disse har vi definisjonen

$$\nu_V = P_V \nu \quad \text{og} \quad \nu_H = P_H \nu. \quad (2.1.2)$$

I [4] er egenskapene til γ_5 -matrisen beskrevet i detalj. En av de viktigste egenskapene til γ_5 -matrisen er at $\gamma_5\gamma_5 = 1$. Ved å bruke dette faktum får jeg fra likningene over at

$$\mathcal{L} = -m(\bar{\nu}_V\nu_H + \bar{\nu}_H\nu_V). \quad (2.1.3)$$

Det generaliserte masseleddet for tilfeller med mange nøytrinotyper blir skrevet som Dirac-masseleddet

$$\mathcal{L} = \bar{\nu}_V \cdot \mathcal{M} \cdot \nu_H + H. \quad (2.1.4)$$

Her er H den Hermiteske konjugerte [4]. Den 3×3 Hermiteske matrisen \mathcal{M} er massematrisen. Jeg skriver alle nøytrinotypene på matriseform som

$$\nu = \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}. \quad (2.1.5)$$

2.2 Nøytrinooscillasjoner

Det eneste klare beviset på at nøytrinoer har masse er funnet av nøytrinooscillasjoner. Siden ingenting forhindrer massematrisen i å være ikke-diagonal, er det ikke sikkert egentilstanden til massen som er involvert er den tilstanden vi kjenner igjen fra eksperimenter som er gitt fra nøytrinotypen. Dette fenomenet er også kjent fra såkalt kvarkmiksing. Så lenge nøytrinoene er masseløse, kan enhver miksing bli definert vekk ved å lage nye kombinasjoner av felt, men når de har masse vil miksingen ha observerbare konsekvenser. For å gjøre ting lettere går vi først ut fra at det bare er e og μ nøytrinoene som mikser, slik at jeg kan skrive

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}. \quad (2.2.1)$$

hvor ν_1 og ν_2 er masse-egentilstandene

$$\nu_i(t) = \nu_i(0)\exp(-iE_it/\hbar). \quad (2.2.2)$$

Her er E_i energien til et gitt nøytrino. Når en har perfekt miksing ($\theta = 45^\circ$) ser en at den gitte typen av nøytrinoet vil oscillere i tid. Når $|E_1 - E_2|t/\hbar = \pi$, vil det relative fortegnet av ν_1 og ν_2 bli reversert og det som i utgangspunktet var e -nøytrinoer vil nå bli observert som μ -nøytrinoer.

Dersom det bare er delt miksing, er det også oscillasjoner, men disse forandrer ikke nøytrinotypen helt. Ut fra [2] ser jeg at sannsynligheten for å observere en oscillasjon er gitt som

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = \frac{1}{2} \sin^2(2\theta) \{1 - \cos[(E_1 - E_2)t/\hbar]\} \quad (2.2.3)$$

som gir at oscillasjon er usannsynlig i grenser med lite miksing.

Siden alle nøytrinoer som er energiske nok til å bli observert nesten helt sikkert er ultra-relativistiske, kan vi tilnærme energien som følger

$$E = (p^2m^2 + m^2c^4)^{1/2} \simeq pc + \frac{m^2c^4}{2E}. \quad (2.2.4)$$

Bevegelsesmengden er bevart i oscillasjonene, og vi har at ΔE bare er følsom for $\Delta m^2 = m_1^2 - m_2^2$ slik at $\Delta E = \frac{\Delta m^2 c^4}{2E}$. Bølgelengden til oscillasjonen får jeg fra likning (2.2.3) og er

$$L = \frac{2\pi c\hbar}{\Delta E}. \quad (2.2.5)$$

Ved å sette inn for ΔE i denne får jeg at bølgelengden for oscillasjonene er

$$L = \frac{4\pi E\hbar}{c^3 \Delta m^2} \simeq 2.5 \text{m} \frac{E/\text{MeV}}{\Delta m^2/(\text{eV})^2}. \quad (2.2.6)$$

For moderate masseforskjeller kan vi se oscillasjonene i reaktor-baserte forsøk. Den typiske energien til et observert nøytrino avhenger av hvilken detektor en bruker på observasjonen, men den ligger som regel på rundt 1 MeV. Videre ligger Δm^2 på størrelsesorden $\sim 10^{-3} \text{eV}^2$ eller $\sim 10^{-5} \text{eV}^2$. Ved å bruke likning (2.2.6) finner en at den typiske oscillasjonsbølgelengden for et observert nøytrino ligger på størrelsesorden $\sim 10^5 \text{m}$ eller $\sim 10^3 \text{m}$. Dette er på størrelsesorden høyden til atmosfæren vår.

2.3 Resultat fra eksperimenter

En rekke eksperimenter har vist at nøytrinoene svinger mellom de forskjellige nøytrinotypene og dermed har masse. Disse eksperimentene har også gitt gode parametergrenser. Jeg vil nå gå gjennom to av de viktigste eksperimentene som har sett på nøytrinoer fra atmosfæren og nøytrinoer fra solen.

2.3.1 Atmosfærenøytrinoer

Atmosfærenøytrinoene kommer fra vekselvirkningen mellom kosmisk stråling og atomkjernene i jordens atmosfære. Dette skaper en dusj med mange ustabile partikler hvor det blir skapt nøytrinoer når disse henfaller. Dette skjer ca 10-30 km opp i jordas atmosfære og skaper både ν_μ og ν_e . Noen av de beste dataene på atmosfærenøytrinoer kommer fra Kamiokande-eksperimentene i Japan. Fra disse eksperimentene viser det seg at fordelingen av ν_e ser ut til å være isotrop samtidig som det kommer mye mindre ν_μ nøytrinoer fra baksiden av jorden enn fra atmosfæren over observatøren. Det ser altså ut til at ν_μ forsvinner desto lenger de reiser. Den letteste måten å forklare dette på er at det kommer av nøytrinooscillasjoner, og at ν_μ svinger til en annen nøytrinotype med større sannsynlighet enn en svingning fra ν_e .

Scenarioet som passer dataene best er oscillasjoner mellom ν_μ og ν_τ for parametrene til masseblanding [5]. Dette gir

$$\Delta m_{\nu_\mu - \nu_\tau}^2 = \Delta m_{atm}^2 \simeq 2.6 \times 10^{-3} \text{eV}^2, \quad \sin^2 2\theta_{atm} \simeq 3.1 \times 10^{-3}. \quad (2.3.1)$$

2.3.2 Solare nøytrinoer

Observasjoner av nøytrinoer som blir sendt fra solen har en historie som går helt tilbake til 60-tallet. Helt siden en startet med disse nøytrinomålingene har en ikke klart å samsvare målingene med astrofysiske forutsigelser. Dette har gjort sitt til at den beste måten å forklare disse måleresultatene på er at nøytrinoer har masse.

Selv om vi ikke har direkte informasjon om kjernen til solen der nøytrinoene blir laget, er det noen aspekter med nøytrinoenes emisjon som kan bli forutsett med god sikkerhet.

Siden energien som kommer fra solen er kjent, kan fluksen av nøytrinoer fra generatoren til hovedenergiprosessen i solen bli beregnet direkte. Etterhvert som nøytrinodetektorene ble sensitive nok til å måle strømmen av nøytrinoene fra solen, ble det klart at antall nøytrinoer som ble observert var lavere enn det som ble beregnet av modellen til solens indre. Antallet nøytrinoer som ble detektert var mellom en og to tredjedeler av antallet en hadde forventet. Dette ble kjent som det solare nøytrinoproblemet.

Problemet ble forsøkt forklart på mange forskjellige måter, alt ifra temperatur og trykkforskjeller, til at kjernereaksjoner i solens indre midlertidig hadde stoppet. Ingen av disse forklaringene var holdbare. Til slutt begynte en å se på egenskapene til selve nøytrinoene. Gjennom mesteparten av 70-tallet trodde en at nøytrinoene var masseløse, men på 80-tallet begynte teoretikerne å se på mulighetene for nøytrino-oscillasjoner, noe som var påpekt av Bruno Pontecorvo og Vladimir Grigov allerede i 1969. De foreslo at hvis nøytrinoene har masse kunne de skifte fra en type til en annen gjennom oscillasjoner, som vi gikk igjennom i avsnitt 2.2. Det betyr at de solare nøytrinoene som manglet i utgangspunktet kunne være elektron-nøytrinoer som forandret type på veien fra solen til jorden.

I 2002 ga "Sudbury Neutrino Observatory" i Canada sterk støtte til denne forklaringen. De detekterte alle de forskjellige nøytrinoene som kom fra solen, og klarte å skille mellom elektron-nøytrinoet og de to andre typene. Etter en del statistisk analyse fant de at ca 35% av innkommende solare nøytrinoer er elektron-nøytrinoer, mens de andre er muon og tau-nøytriner. Totalt antall observerte nøytrinoer stemte godt overens med det som tidligere var beregnet ved hjelp av kjernefysikken basert på fusjonreaksjoner inne i solen.

Detaljert analyse av disse dataene ble komplisert på grunn av Mikheyrov-Smirnov-Wolfenstein (MSW) effekten. I likningene jeg har sett på over går vi ut fra at nøytrinoene oscillerer i vakuum. MSW effekten korrigerer oscillasjonslikningene på grunn av materie. Selv om nøytrinoene nesten ikke vekselvirker med noe spiller MSW en rolle for solare nøytrinoer. Spesielt for ν_e som vekselvirker gjennom så kalt ladet strøm. Siden solare nøytrinoer oscillerer gjennom materie, spesielt i solens indre, må en ta med denne effekten. Etter at en korrigerer dataene fått fra de solare nøytrinoene med denne effekten kom en frem til følgende verdier på parametrene.

$$\Delta m_{\nu_e - \nu_{\mu, \tau}}^2 = \Delta m_{\odot}^2 \simeq 7.9 \times 10^{-5} eV^2, \quad \sin^2 2\theta_{\odot} \simeq 0.81. \quad (2.3.2)$$

2.3.3 Oppsummering

De best tilpassede verdiene for solare og atmosfære nøytrinoer gir at $\Delta m_{\odot}^2 = 7.9 \times 10^{-5} eV^2$ og $\Delta m_{atm}^2 = 2.5 \times 10^{-3} eV^2$. Dette gir en nedre grense på den totale nøytrinomassen. Disse verdiene kan også gi et hint om den totale nøytrinomasseskalaen som bør ligge på ($m_{\nu} \gg \Delta m_{\nu}$).

Verdiene for miksevinklene har ikke noen påvirkning på de kosmologiske massegrensene til nøytrinoene, men er viktige i partikkelfysikken når en skal finne den underliggende mekanismen som produserer nøytrinomassen.

2.4 Finne den absolutte nøytrinomassen

Mens nøytrinoscillasjonseksperimenter har gitt oss gode data på masserotforskjellene, er det fortsatt en lang vei å gå for å finne den samme presisjonen når en kommer til skalaer for den absolutte massen til nøytrinoer. Det finnes mange eksperimenter som har forsøkt seg på

dette. Mange forsøker å måle direkte gjennom å se på radioaktive prosesser eller andre typer prosesser som finnes i partikkelfysikken. De to viktigste prosessene jeg kan nevne er β -decay av ^3He og nøytrinoløs dobbel β -decay ($0\nu\beta\beta$), som er beskrevet i [6].

Jeg vil i denne masteroppgaven bruke kosmologien som ett utgangspunkt på å finne gode grenser for nøytrinomassen. Kosmologien kan ikke finne massen til hver enkel nøytrinotype, men gir i stedet begrensninger på summen av alle nøytrinomassene $\sum_i m_i = M_\nu$. Dette gjør at kosmologien er et viktig redskap for å finne nøytrinomassen siden oscillasjonseksperimentene bare måler masseforskjeller. Jeg skal senere i masteroppgaven vise hvordan dette kan bli gjort ved bruk av en programpakke kalt CosmoMC sammen med utvalgte datasett.

Kapittel 3

Kosmologi

Kosmologi er læren om de store strukturene i universet, og tar for seg fundamentale spørsmål om dets dannelse og utvikling. Som vitenskap stammer kosmologien fra det kopernikanske prinsipp, som sier at himmellegemer følger de samme fysiske lovene som vi har på jorden. Moderne kosmologi begynte med Albert Einsteins generelle relativitetsteori, sammen med bedre observasjoner av ekstremt fjerne objekter. Dette kapitlet bygger i hovedsak på [7], [8], [9] og [10].

3.1 Notasjon

Før jeg går videre vil jeg gå gjennom en del viktig notasjon. Disse blir spesielt brukt i generell relativitetsteori og da også videre i kosmologien.

I tre dimensjoner har en vektor \mathbf{A} tre komponenter som jeg refererer til som A^i , hvor i tar verdiene 1, 2 og 3. Skalarproduktet av to vektorer blir da

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 A^i B^i = A^i B^i, \quad (3.1.1)$$

hvor jeg har introdusert Einsteins summasjonskonvensjon ved å sløyfe \sum tegnet når indeksen forekommer to ganger. Matriser kan også skrives på komponentform. For eksempel vil produktet av to matriser \mathbf{M} og \mathbf{N} bli

$$(\mathbf{MN})_{ij} = M_{ik} N_{kj} \quad (3.1.2)$$

med summasjon over k .

I virkeligheten må vi foreta to generaliseringer. For det første har vektorer en fjerde komponent i generell og spesiell relativitetsteori, nemlig tidlike komponenter. Siden romlige komponenter går fra 1 til 3 er det naturlig å bruke 0 for denne tidlike komponenten. Greske bokstaver blir brukt til å representere alle fire komponentene, slik at $A^\mu = (A^0, A^i)$. For det andre må vi skille mellom øvre og nedre indekser. En kan gå frem og tilbake med den metriske tensoren slik at

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu, \quad (3.1.3)$$

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu. \quad (3.1.4)$$

Jeg kan produsere invariante, eller skalarer med disse. For eksempel kan utsagnet om at firer-impulsen av en masseløs partikkel opphøyd i annen må forsvinne skrives

$$P^2 = P_\mu P^\mu = g_{\mu\nu} P^\mu P^\nu = 0. \quad (3.1.5)$$

Akkurat som en metrikk kan gjøre en øvre indeks på en vektor om til en nedre indeks, kan metrikken bli brukt til å heve og senke indekser på tensorer med forskjellig antall indekser. For eksempel når en hever indeksen på den metriske tensoren blir

$$g^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g_{\alpha\beta}. \quad (3.1.6)$$

Hvis $\alpha = \nu$ vil det første uttrykket på høyre side være lik uttrykket på venstre side, slik at hvis kombinasjonen av de to siste uttrykkene på høyre side tvinger $\alpha = \mu$ vil likningen være riktig. Derfor er

$$g^{\nu\beta} g_{\alpha\beta} = \delta_\alpha^\nu \quad (3.1.7)$$

hvor δ_α^ν blir kalt Kronecker delta og er lik null hvis ikke $\nu = \alpha$ hvor den er 1.

En annen notasjon er også viktig å nevne. Når en funksjon skal deriveres skriver en normalt $\frac{\partial f}{\partial x^\mu}$. Men for å gjøre ting litt mer oversiktelig har vi en annen notasjon som er mer hendig:

$$\frac{\partial f}{\partial x^\mu} = f_{,\mu}. \quad (3.1.8)$$

I tillegg til denne notasjonen vil jeg også definere den deriverte med hensyn på kosmisk tid som

$$\dot{A} = \frac{d}{dt} A. \quad (3.1.9)$$

Jeg vil også bruke konform tid η som jeg vil komme tilbake til senere. Den deriverte med hensyn på denne definerer jeg som

$$A' = \frac{d}{d\eta} A \quad (3.1.10)$$

3.2 Einsteins feltlikninger

En grunnleggende likning i kosmologien er Einsteins feltlikning. Den beskriver gravitasjon som krumt tidrom forårsaket av materie og energi. Den har formen

$$\text{tidrom-krumning} \propto \text{energi-impulstensor} \quad (3.2.1)$$

og skrives

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}, \quad (3.2.2)$$

hvor $G_{\mu\nu}$ er Einsteintensoren og $T_{\mu\nu}$ er energi-impulstensoren. G er Newtons konstant og har verdien $G = (6.67428 \pm 0.00067) \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$.

3.2.1 Einsteintensoren $G_{\mu\nu}$

$G_{\mu\nu}$ beskriver krumningen av tidrommet. Den uttrykkes

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (3.2.3)$$

hvor $R_{\mu\nu}$ er Riccitensoeren, $g_{\mu\nu}$ er den metriske tensoren og R er Ricciskalaren. Før jeg begynner å se på hva de forskjellige symbolene betyr vil jeg først forklare hva som menes med metrikk.

Generelt gjør metrikken koordinatavstander om til fysiske avstander og er derfor et viktig redskap når en skal finne størrelsemessige beskrivelser av et utvidende univers. Metrikken for kartesiske koordinater sier at avstanden mellom to punkter separert av dx og dy er $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Men hvis vi bruker polarkoordinater i stedet, vil ikke denne fysiske avstanden bli uttrykket som $ds^2 = dr^2 + d\theta^2$ men som $ds^2 = dr^2 + r^2 d(\theta)^2$. Denne avstanden er invariant. Det vil si at en observatør som bruker kartesiske koordinater til å finne denne avstanden vil få det samme resultatet som en som bruker polarkoordinater. En metrikk omgjør observatørvhengige koordinater til avstander. Generelt kan vi skrive $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ i fire tidromdimensjoner. I mitt to dimensjonale eksempel over er hvert diaogonale element lik 1 i kartesiske koordinater. I polarkoordinater er $g_{11} = 1$ for $x^1 = r$ mens for $x^2 = \theta$ er $g_{22} = r^2$. Et flatt tidrom, kalt Minkowski tidrom, ser ut som følger:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2.4)$$

Linjeelementet her kan uttrykkes $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$, hvor jeg har satt $c = 1$.

Riccitensoeren er beskrevet ved hjelp av Christoffelsymboler

$$R_{\mu\nu} = \Gamma_{\mu\nu,\alpha}^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha,\nu}^\alpha + \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha \Gamma_{\mu\nu}^\beta - \Gamma_{\beta\nu}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\beta. \quad (3.2.5)$$

Christoffelsymbolene Γ blir brukt til å utføre praktiske beregninger i differensialgeometri. De beskriver hvordan en vektor endres ved parallelltransport, som er beskrevet mer i detalj i [7]. Litt mer billedlig forklart vil dette si at de beskriver geodeter i generelle koordinatsystem. En geodet er den banen en partikkel vil følge når den ikke blir påvirket av noen krefter i et gitt tidrom. I et ikke-trivielt tidrom, som et utvidenden univers for eksempel, er det ikke mulig å finne faste kartesiske koordinatsystem, så vi trenger å vite hvordan frie partikler beveger seg generelt. Dette beskriver Christoffelsymbolene. De er gitt av definisjonen

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}). \quad (3.2.6)$$

Ricciskalaren uttrykkes $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ og er kontraksjonen av Riccitensoeren. Det vil si at vi kan finne Christoffelsymbolene ut fra metrikken, som vi igjenn kan finne Riccitensoeren og Ricciskalaren ut fra. Dermed er $G_{\mu\nu}$ bestemt og det gjenstår å løse høyre siden av Einsteins feltlikning (3.2.3).

3.2.2 Energi-impulstensoren

Energi-impulstensoren er en symmetrisk tensorstørrelse i fysikken som beskriver tettheten og fluksen av energi og bevegelsesmengde i tidrommet,

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}. \quad (3.2.7)$$

T^{00} representerer energitettheten.

T^{i0} representerer impulstettheten.

T^{0i} representerer energifluksen.

T^{ii} representerer som regel trykket ($T^{ii} > 0$).

T^{ij} representerer skjærkrefter ($i \neq j$).

I et utvidende univers blir energibevaring uttrykket ved hjelp av den kovariant deriverte. Den uttrykkes som

$$T_{\nu;\mu}^{\mu} \equiv \frac{\partial T_{\nu}^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\alpha\mu}^{\mu} T_{\nu}^{\alpha} - \Gamma_{\nu\mu}^{\alpha} T_{\alpha}^{\mu}, \quad (3.2.8)$$

og vi har at $T_{\nu;\mu}^{\mu} = 0$. I kosmologi er det mest hendig å beskrive innholdet i universet som en perfekt væske

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_{\mu}u_{\nu} + pg_{\mu\nu}, \quad (3.2.9)$$

hvor ρ er massetettheten og p er trykket målt i væskens hvilesystem. I en medfølgende ortonormal basis er komponentene til 4-hastigheten $u^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$. Da er energi-impulstensoren gitt som

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (3.2.10)$$

Sammenhengen mellom trykk og massetetthet er gitt som $p = w\rho$, der w avhenger av hva slags perfekt væske vi har.

* For støv er $w = 0$.

* For stråling og ultrarelativistiske partikler er $w = 1/3$.

* Hvis jeg antar at ingen hastighet kan bli målt relativt til vakuum, må alle komponentene til energi-impulstensoren være Lorentz-invariante. Av dette følger at $T_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu}$. Når vakuum blir definert som perfekt væske får jeg at $p = -\rho$. For vakuumenergi blir da $w = -1$.

3.3 Friedmannlikningene

Friedmannlikningene er et sett differensiallikninger som har hatt stor suksess med å beskrive universet. For å komme frem til disse tar en utgangspunkt i at universet er:

Homogent : Tetthet uavhengig av avstand fra et valgt punkt.

Isotropt : Tetthet uavhengig av observasjonsretning relativt til et valgt punkt.

Dette gjelder på de store skalaene. På de små skalaene, for eksempel i vårt solsystem, gjelder ikke dette.

I et utvidende univers vil to gitte punkter bevege seg fra hverandre, slik at distansen mellom disse punktene alltid er proporsjonal med skalafaktoren $a(t)$. Denne beskriver universets størrelse. Ved tidens begynnelse definerer vi $a(0) = 0$, mens i dag er det nyttig å velge $a(t_0) = 1$. I et flatt homogent og isotropt univers vil metrikken være nesten identisk til Minkowski metrikken bortsett fra at avstanden må multipliseres med skalafaktoren.

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t) \end{pmatrix}. \quad (3.3.1)$$

Dette blir kalt Friedmann-Robertson-Walker metrikken. Setter jeg denne inn i likning (3.2.3), får jeg Friedmannlikningene for et romlig flatt univers.

$$H(t)^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (3.3.2)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p). \quad (3.3.3)$$

$H(t)$ blir kalt for Hubbleparameteren og er definert som $H(t) = \frac{\dot{a}}{a}$. Ut fra disse likningene kan jeg finne egenskaper med universet ved å starte med antagelser om hva universet jeg ser på er bygget opp av. For eksempel hvis jeg ser på likning (3.3.3) ser jeg at denne beskriver akselerasjonen til universet. I et univers fylt av støv hvor $p = 0$, vil universets ekspansjon bremses opp. Det samme gjelder for et univers fylt med stråling siden $p = \rho/3$.

I et univers dominert av vakuumenergi er $p = -\rho$, og vi ser av likning (3.3.3) at universets ekspansjon i dette tilfelle vil akselerere. Konklusjonen er at universets ekspansjon vil akselerere når $p < -\rho/3$, mens den vil bremse opp når $p > -\rho/3$.

ρ i (3.3.2) og (3.3.3) kan bestå av mange forskjellige komponenter. De forskjellige komponentene er dominerende i forskjellige faser i universets utvikling. ρ utvikler seg for eksempel forskjellig for støv i forhold til stråling.

$$\rho_{\text{støv}} = \rho_m = \rho_{m0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-3}, \quad (3.3.4)$$

$$\rho_{\text{stråling}} = \rho_r = \rho_{r0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^{-4}, \quad (3.3.5)$$

$$\rho_{\text{vakuum}} = \rho_\Lambda = \rho_{v0}. \quad (3.3.6)$$

Vi ser av disse likningene at et univers bestående av disse komponenten først var dominert av stråling, for så å bli dominert av støv. Etter hvert tar vakuumenergien mer og mer over og blir den dominerende faktoren.

Ut fra Friedmannlikningene kan jeg også finne uttrykk for skalafaktoren til universet ved de forskjellige tider for $w \neq -1$

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}}, \quad (3.3.7)$$

og for $w = -1$

$$a(t) = e^{H_0(t-t_0)}. \quad (3.3.8)$$

For de forskjellige energikomponentene jeg har nevnt over blir da størrelsen gitt som

$$a(t)_m = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad (3.3.9)$$

$$a(t)_r = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3.10)$$

$$a(t)_\Lambda = e^{H_0(t-t_0)}. \quad (3.3.11)$$

Her er H_0 dagens hubblekonstant. En definerer den kritiske tettheten som tettheten til et flatt univers. Den får jeg ved å løse likning (3.3.2) med hensyn på ρ ,

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (3.3.12)$$

Ved å løse denne for dagens hubblekonstant $H_0 = 100h \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, hvor $h = 0.7$ i dag, får jeg dagens kritiske tetthet

$$\rho_{c0} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} = 1.879 \times 10^{-29} h^2 g \text{ cm}^{-3}, \quad (3.3.13)$$

hvor $g = 9.80665 \text{ N/kg}$ er jordas gravitasjonskonstant. Det er vanlig og praktisk å måle tettheter i forhold til kritisk tetthet i et flatt univers,

$$\Omega = \sum_i \Omega_i = \sum_i \frac{\rho_i}{\rho_c} = 1. \quad (3.3.14)$$

Her er i de forskjellige energikomponentene. Nå kan jeg skrive likning (3.3.2) på en annen måte ved å ta med de forskjellige energikomponentene nevnt over

$$\Omega = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda = 1. \quad (3.3.15)$$

I dag er dette forholdet gitt som

$$\sum_i \Omega_{i0} = \Omega_{m0} + \Omega_{r0} + \Omega_{\Lambda 0} = 1 \quad (3.3.16)$$

hvor $\Omega_{i0} = \frac{\rho_{i0}}{\rho_{c0}}$.

3.4 Det tidlige Univers

Det er velkjent at en tenker seg at universet startet sin utvikling gjennom Big Bang. Men hva er egentlig Big Bang, og hvordan har universet utviklet seg fra dette? Jeg vil nå beskrive hvordan universet utviklet seg i de tidligere tider i et flatt Λ CDM-univers, som er det universet vi går ut fra vi har idag. Dette universet består av materie, stråling og mørk energi som tilsvarer den kosmologiske konstanten Λ .

3.4.1 Inflasjon

Det er mange egenskaper med universet i dag som er uventede. Spesielt har to problemer utfordret Big Bang teorien.

* Universet er veldig nær den kritiske tettheten.

* Horisontproblemet: CMB-temperaturen, som er universets temperatur, er 2.7 Kelvin med en presisjon på noen hundretusenedel etter at man har korrigert for Melkeveiens bevegelse, uavhengig av retningen den måles i.

Dette er i utgangspunktet veldig lite sannsynlig siden de største skalaene vi ser på i universet ikke kan ha vært i kausal kontakt med hverandre. Grunnen er at lyset bruker mer tid enn universets alder på å reise mellom disse skalaene, som vil si at informasjon ikke kan ha blitt utvekslet. Inflasjon løser disse problemene. Jeg ser først på horisontproblemet.

Den medfølgende horisonten til universet er gitt som

$$\eta = \int_0^a \frac{da}{a} \frac{a}{H(a)}, \quad (3.4.1)$$

mens den medfølgende Hubbleradiusen er

$$R_H = 1/aH. \quad (3.4.2)$$

Hubble radiusen er distansen en partikkel kan reise i løpet av en ekspansjonstid. Det vil si sånn omtrent tiden hvor skalafaktoren dobbles. Hvis partikler er separert av en avstand større enn η , kan de aldri ha kommunisert med hverandre. Hvis de er separert av en avstand større enn R_H , kan de ikke kommunisere med hverandre akkurat nå. Det er derfor en mulighet for at η kan være mye større enn R_H idag, slik at de ikke kan kommunisere nå men var i kausal kontakt før. Hvis Hubbleradiusen tidligere var mye større enn den er idag, ville dette vært tilfelle. Da ville η ha fått mesteparten av bidragene fra tidligere tider, som vil si tider før den strålings og materiedominerte fasen.

For at Hubbleradiusen skal minke må aH øke.

$$\frac{d}{dt}(aH) = \frac{d}{dt} \left[a \frac{da/dt}{a} \right] = \frac{d^2 a}{dt^2} > 0. \quad (3.4.3)$$

For å løse dette horisontproblemet må universet gå gjennom en periode der det akselererer. Dette blir kalt inflasjon.

Det er vanlig å sette H konstant i løpet av inflasjonen. Siden $da/a = Hdt$, vil skalafaktoren utvikle seg som

$$a(t) = a_e e^{H(t-t_e)} \quad (3.4.4)$$

i løpet av denne fasen. Her er t_e tiden ved slutten av inflasjonen. For at skalafaktoren skal øke med faktoren 10^{28} , som er størrelsesordenen de fleste inflasjonsmodeller opererer med idag, må argumentet til eksponensialet være $\ln(10^{28}) \sim 64$. Inflasjon løser altså horisontproblemet hvis universet ekspanderer med 64 e-foldinger.

Denne akselerasjonen av universet på veldig kort tid løser også flathetsproblemet, eller at universet er veldig nær den kritiske tetthet. For at tettheten i universet i dag skal være veldig nær den kritiske tettheten må den ha vært ekstremt fininstilt ved begynnelsen av den kosmiske

utviklingen. Under inflasjonen ble universet blåst opp fra mikrostørrelse til astronomiske størrelser på bare noen mikrosekunder. Det betyr at uansett hvordan universet så ut før inflasjon vil dette ha jevnet ut eventuelle ujevne deler.

Hva som drev inflasjon er enda et stort spørsmål, men de fleste er enig om at en trenger en form for negativt trykk for å drive dette. Et skalarfelt kan ta seg av dette.

3.4.2 Skalarfelt i kosmologi

Et skalarfelt beskriver en skalar spinn-0 partikkel. Selv om det enda ikke har blitt gjort direkte observasjoner av en fundamental skalar partikkel, dukker de opp i mange sammenhenger i teoretisk partikkelfysikk. Inflasjonskosmologi er et område hvor de spiller en viktig rolle. De innehar noe så uvanlig som potensiell energi som rødforskyves veldig sakte når universet utvider seg. Dette korresponderer til en effektiv tilstandslikning med negativt trykk, som vi har sett er akkurat det vi trenger for inflasjon. Skalarfeltet en trenger til inflasjon blir ofte kalt inflatonet.

Standard måten for å spesifisere en partikkelteori på er gjennom dens lagrangetetthet, hvor en kan få likningen for bevegelse [10]. I [8] finner en likningene for energitetthet og trykk for et homogent skalarfelt $\phi = \phi(t)$. Disse er gitt som

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi), \quad (3.4.5)$$

$$P_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi). \quad (3.4.6)$$

Fra likning (3.4.5) og (3.4.6) ser jeg at forholdene for inflasjon er innfridd hvis $\dot{\phi}^2 < V(\phi)$.

Ved å sette disse likningene inn i Friedmannlikningen (3.3.2) og væskelikningen $\rho = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p)$, hvor jeg antar et flatt univers, får jeg

$$H^2 = \frac{1}{3M_{PL}^2} \left[V(\phi) + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 \right] \quad (3.4.7)$$

og

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -\frac{dV(\phi)}{d\phi}. \quad (3.4.8)$$

Fra nå av bruker jeg $M_{PL} = (8\pi G)^{-1/2}$, som blir kalt den reduserte Planckmassen.

Standardmetoden for å analysere inflasjon er slow-roll tilnærmingen. Her forandrer ϕ seg veldig sakte, slik at $V(\phi) \gg \dot{\phi}^2$ og $\frac{dV(\phi)}{d\phi} \gg \ddot{\phi}$. Dette gjør at vi kan kvitte oss med siste leddet i likning (3.4.7) og første ledd i likning (3.4.8). Det gir

$$H^2 \simeq \frac{V(\phi)}{3M_{Pl}^2}, \quad (3.4.9)$$

$$3H\dot{\phi} \simeq -\frac{dV(\phi)}{d\phi}, \quad (3.4.10)$$

hvor \simeq betyr at uttrykkene er like innenfor slow-roll beregningen.

For at disse tilnærmingene skal være gyldige må to forhold gjelde,

$$\epsilon \ll 1 \text{ og } |\kappa(\phi)| \ll 1, \quad (3.4.11)$$

hvor slow-roll parametrene κ og ϵ i [9] er definert som

$$\epsilon(\phi) = \frac{M_{Pl}^2}{2} \left(\frac{dV}{d\phi} \frac{1}{V} \right)^2, \quad (3.4.12)$$

$$\kappa(\phi) = M_{Pl}^2 \left(\frac{d^2V}{d\phi^2} \frac{1}{V} \right). \quad (3.4.13)$$

κ blir ofte definert som η i lærebøker, men jeg velger å kalle den for κ . Vi sier at vi har inflasjon når $\epsilon < 1$ og $|\kappa| < 1$ og at inflasjonen slutter når $\epsilon \simeq 1$ eller $|\kappa| \simeq 1$. Disse slow-roll parametrene er veldig nyttige til å uttrykke observerbare størrelser beregnet i inflasjonsmodeller.

3.4.3 Tider etter inflasjonsfasen og nøytrinoenes rolle

Inflasjonsfasen skapte gaussiske startbetingelser for fluktuasjonene, som jeg vil komme tilbake til i neste kapittel, samt mange forskjellige partikler hvor av en del var nøytrinoer. I de tidligste tider rett etter inflasjonsfasen var universet veldig varmt og det var dominert av stråling. Etter hvert som universet utvidet seg ble det kaldere, noe som gjorde at kvarker kunne slå seg sammen til nukleoner, og vi fikk etter hvert et baryon-foton-plasma. Men universet var fortsatt veldig varmt og hadde en høy tetthet, slik at nøytrinoene fortsatt var i likevekt med baryon-foton-plasmaet og fulgte en Fermi-Dirac fordeling

$$f_\nu = \frac{1}{e^{(p-\mu)} + 1}. \quad (3.4.14)$$

Ved dette tidspunktet var nøytrinoene fortsatt ultrarelativistiske, slik at vi fortsatt kan bruke p i stedet for energien i fordelingen. Vi går ut fra at det kjemiske potensialet μ_ν til nøytrinoene er neglisjerbare. Dette kommer av at dagens observasjoner indikerer dette. Dersom de var masseløse ville $\mu_\nu = 0$ eksakt, akkurat som for fotonene.

Etter at temperaturen i universet sank under massen til nøytrinoene (freeze-out), begynte de å koble seg fra resten av plasmaet. Kort tid etter dette var universet kald nok til at elektroner og positroner kunne anihilere. Dette førte til en opphetning av baryon-foton-plasmaet som nøytrinoene ikke var med på. En kan finne forholdet mellom nøytrinotemperaturen og fotontemperaturen ved å bruke statistisk mekanikk

$$T_\nu = (4/11)^{1/3} T_{CMB} = 1.946K, \quad (3.4.15)$$

hvor $T_{CMB} = 2.726$ er temperaturen i universet idag. Dette gir en nøytrinotetthet på

$$n_\nu^0 = \frac{6\zeta(3)}{11\pi^2} T_{CMB}^3, \quad (3.4.16)$$

hvor $\zeta(3) \approx 1.202$ som gir $n_\nu = 112 \text{ cm}^{-3}$ idag. Massive nøytrinoer er ikke-relativistiske slik at deres nåværende kontribusjon til massetettheten kan bli funnet ved å multiplisere n_ν med total masse til nøytrinoene $m_{\nu,tot} = M_\nu = \sum m_\nu$. I [12] finner en at den kosmiske tetthetsparameteren da kan uttrykkes som

$$\Omega_\nu h^2 = \frac{M_\nu}{93.14 \text{ eV}}. \quad (3.4.17)$$

Vi går her ut fra at nøytrinomassespekteret er degenerert, det vil si at massen er mye større enn massesplittingene og dermed at de tre masseegenverdiene er tilnærmet like.

3.4.4 Dannelsen av CMB

Etter elektron-positron annihileringer var baryon-foton-plasmaet fortsatt en tett koblet væske gjennom vekselvirkninger mellom frie elektroner, protoner og fotoner. Etter hvert ble temperaturen lav nok til at elektroner kunne binde seg til nukleonene og danne stabile atomer. Ved dette tidspunktet stoppet fotonene å vekselvirke med det baryoniske plasmaet, og de begynte å bevege seg uhindret gjennom rommet. Dette er fotonene vi ser som bakgrunnstrålingen eller CMB idag. Disse fotonene er kraftig rødforskjøvet på grunn av universets utvidelse. I CMB-strålingen er det små fluktuasjoner på størrelsesorden $\frac{\delta T}{T} \sim 10^{-5}$. Disse fluktuasjonene var frøene som senere vokste og skapte strukturene vi ser i universet idag.

3.5 Kosmologiske observasjoner

Min oppgave bygger i hovedsak på kosmiske observasjoner av bakgrunnstrålingen og storskalastrukturen LSS. Jeg vil nå fortelle litt om disse to kosmologiske observasjonene. Senere i oppgaven vil jeg forklare hvordan Håkon Dahle har funnet en god måte å studere storskalastrukturer gjennom gravitasjonslensing. Jeg vil i denne oppgaven jobbe med disse dataene sammen med CMB-datasettet WMAP.

3.5.1 CMB-målinger

De viktigste observable størrelsen i CMB-strålingen er temperaturfluktuasjonene og deres vinkelfordeling. En vil sammenlikne disse temperaturfluktuasjonene med forutsigelser fra en gitt teori. Teorien kan forutsi statistiske egenskaper med fordelingen av temperaturfluktuasjonene på himmelen. Det vi trenger er derfor målinger av hvor store fluktuasjonene er i gjennomsnitt på de forskjellige skalaene. [14] viser hvordan disse fluktuasjonene blir parametrisert.

Her defineres en temperaturfluktuasjon i en retning \mathbf{x} på himmelen som

$$\Theta(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \eta) = \frac{1}{T} \delta T(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \eta), \quad (3.5.1)$$

hvor \mathbf{n} er enhetsvektoren til retningen av bevegelsesmengden til fotonet. En transformerer $\Theta(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \eta)$ til fourierrommet siden fordelingene av fluktuasjonene er på forskjellige skalaer. Da vil likningen bli

$$\Theta(\mathbf{x}, \mathbf{n}, \eta) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \Theta(\mathbf{k}, \mathbf{n}, \eta) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (3.5.2)$$

Jeg introduserer nå en ny størrelse μ som er definert som $\mu \equiv \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n} = \cos \theta$, hvor $\hat{\mathbf{k}}$ er enhetsvektoren i retning av \mathbf{k} . Vi kan nå skrive romvinkelen som

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta = 2\pi d \cos \theta = 2\pi d\mu. \quad (3.5.3)$$

Θ kan skrives som en sum av Legendrepolymer

$$\Theta(\mathbf{k}, \mu, \eta) = \sum_{l=0}^{\infty} (-i)^l (2l+1) \Theta_l(\mathbf{k}, \eta) P_l(\mu), \quad (3.5.4)$$

hvor P_l er et Legendrepolymer av grad l . Legendrepolymerne har en ortogonalitetsrelasjon som ser ut som følger:

$$\int_{-1}^1 d\mu P_l(\mu) P_{l'}(\mu) = \frac{2\delta_{ll'}}{2l+1}. \quad (3.5.5)$$

Ved å bruke likning (3.5.3) og (3.5.5) kan en skrive

$$\frac{1}{4\pi} \int d\Omega P_l P_{l'} = \frac{\delta_{ll'}}{2l+1}. \quad (3.5.6)$$

Ut fra denne finner vi at (3.5.4) er tilfredstilt hvis vi skriver en multipol av Θ som

$$\Theta_l(\mathbf{k}, \eta) = \frac{i^l}{4\pi} \int d\Omega \Theta(\mathbf{k}, \mathbf{n}, \eta) P_l(\mu). \quad (3.5.7)$$

Et viktig mål med CMB-målinger er å finne korrelasjoner mellom punkter med forskjellige vinkelseparasjoner på himmelen. Hvis to punkter er separert med en vinkel β på himmelen, er det vanlig å definere en to-punkt korrelasjonsfunksjon som

$$C(\beta) = \langle \Theta(\mathbf{k}, \mathbf{n}, \eta_0) \Theta(\mathbf{k}, \mathbf{n}', \eta_0) \rangle. \quad (3.5.8)$$

Her er $\cos \beta = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}')$. Vi vil omskrive denne korrelasjonsfunksjonen uttrykket med Legendrepolyonene på formen

$$C(\beta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) C_l P_l(\cos \beta). \quad (3.5.9)$$

Funksjonen C_l i likningen over er den vi er interessert i. Vi kan si at denne funksjonen koder korrelasjonsfunksjonen gitt temperaturfluktuasjonene. Hvis en setter likning (3.5.2) inn i likning (3.5.8) får vi

$$\begin{aligned} C(\beta) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi^3)} \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} \sum_{l, l'=0}^{\infty} (-i)^{l+l'} (2l+1)(2l'+1) \langle \Theta_l(k, \eta_0) \Theta_{l'}(k', \eta_0) \rangle \\ &\quad P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}) P_{l'}(\hat{\mathbf{k}}' \cdot \mathbf{n}') e^{i(\mathbf{k}+\mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}}. \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

Vi går nå ut fra at de tidlige temperaturfluktuasjonene er gaussiske. Dette blir forutsagt av standard inflasjonsmodeller og passer CMB-dataene godt. Ut fra dette faktum er de forskjellige Θ_l modene ortogonale og vi har

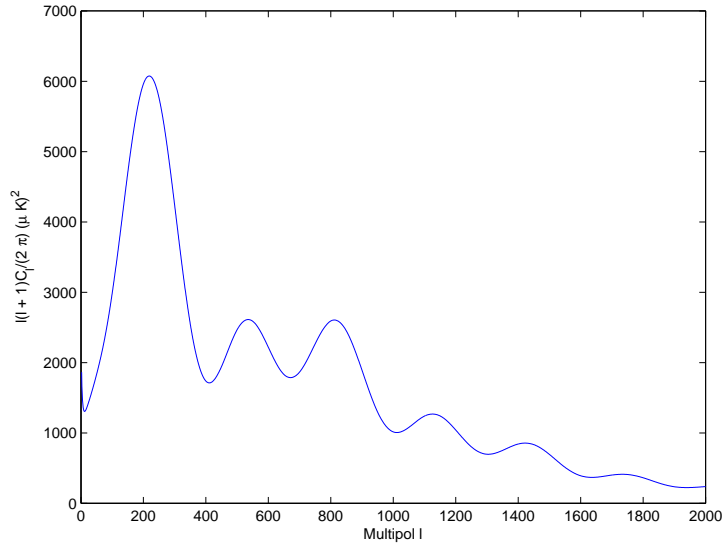
$$\langle \Theta_l(k, \eta_0) \Theta_{l'}(k', \eta_0) \rangle = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \delta_{ll'} \langle |\Theta_l(k, \eta)|^2 \rangle. \quad (3.5.11)$$

Jeg ser at integrasjonen i (3.5.10) bare gir bidrag når $\mathbf{k}' = -\mathbf{k}$. Summasjonene av l' ene vil bare gi bidrag når $l = l'$. Ved å bruke disse resultatene kan vi skrive om (3.5.10) på en mer hendig form,

$$C(\beta) = \sum_{l=0}^{\infty} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} (2l+1)^2 \langle |\Theta_l(k, \eta_0)|^2 \rangle P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}'). \quad (3.5.12)$$

Dette produktet av Legendrepolyonomet kan nå bli forenklet med å bruke den ortogonale relasjonen i likning (3.5.6) og at $\int d^3 k = \int dk k^2 d\Omega_k$. Vi har da at

$$\int d\Omega_k P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}) P_l(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}') = \frac{4\pi}{2l+1} P_l(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}'). \quad (3.5.13)$$



Figur 3.1: CMB-styrkespekteret til et flatt Λ CDM-univers beregnet i CAMB.

Ved å bruke dette reduseres uttrykket for $C(\beta)$ til

$$C(\beta) = \sum_{l=0}^{\infty} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} (2l+1) \langle |\Theta_l(k, \eta_0)|^2 \rangle P_l(\cos\beta). \quad (3.5.14)$$

Nå kan jeg finne et uttrykk for C_l i (3.5.9). Ved å sammenlikne (3.5.9) og (3.5.14) kan vi skrive C_l som

$$C_l = 4\pi \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \langle |\Theta_l(k, \eta_0)|^2 \rangle. \quad (3.5.15)$$

Jeg ser at en stor C_l gir en stor temperaturfluktuasjon på skalaer satt av l . Målinger av temperaturfluktuasjonen av CMB blir ofte gjort med $(2l+1)C_l$ som en funksjon av l . Det er vanlig å plote dette styrkespekteret på formen $l(l+1)C_l/(2\pi)(\mu k)^2$. Dette er fordi spekteret skalerer praktisk talt som l^{-2} ved lave l , og det er derfor ønskelig å vise noe som er nærmest flatt. Et eksempel på CMB-styrkespekteret er gitt i figur 3.1 for et flatt Λ CDM-univers uten nøytrinomasse. Jeg vil i neste kapittel komme inn på hva disse forskjellige toppene betyr. Hadde jeg tatt med nøytrinomasse i dette universet ville styrkespekteret blitt forskjøvet. Dette kommer jeg tilbake til senere.

Presise målinger av CMB-styrkespekteret er kanskje de sikreste kosmologiske dataene vi har. Det beste datasette fra "full-sky" observasjoner har kommet fra tre års data fra WMAP prosjektet [16]. Nylig ble data fra fem års observasjoner også tilgjengelige.

3.5.2 Observasjoner av storskalastrukturen

Målinger av storskalastrukturen i universet LSS er kanskje den nest viktigste type data som vi kan tilpasse våre kosmologiske modeller. Det LSS i utgangspunktet gjør er å finne så mange galakser som mulig og lagre deres vinkel og rødforskyvningsfordeling. Når en har dette kan en

lage statistiske modeller på mengden av galaksehoper på forskjellige skalaer og sammenlikne dette med kosmologiske modeller.

Notasjonen til størrelsen av LSS er litt forskjellig fra CMB siden vi måler galaksefordelingen i både vinkel og rødforskyvningsrommet. Det er vanlig å definere en variabel $\delta_m(k, z) \equiv \frac{\delta\rho_m(k, z)}{\rho_m(z)}$ som korresponderer til Θ variablene brukt for strålingsfluktuasjonene. Her er ρ_m gjennomsnittelig materiefordeling og $\delta\rho_m$ en liten forandring fra ρ_m i den lokale materietettheten. Vi jobber i fourierrommet. Materie-styrkespekteret er da definert som den fouriertransformerte av to-punktskorrelasjonsfunksjonen

$$P(k, z) = \langle |\delta_m(k, z)|^2 \rangle. \quad (3.5.16)$$

Ved å telle galakser i celler i k-z-rommet er denne korrelasjonsfunksjonen direkte målbar. Det vi egentlig måler er galaksenes styrkespekter. Men mesteparten av materien i vår standar Λ CDM-modell består av mørk materie som er usynlig. Derfor lager en teoretiske forutsigelser fra lineær teori på størrelser som er dominert av mørk materie. Disse blir sammenliknet med observasjoner av baryonsk materie som er i galakser og som ikke er lineære. Dette gjør at for eksempel målingene til de to store datasettene av galaksetellinger idag, 2df Galaxy Redshift Survey (2sF) og Sloan Digital Sky Survey(SDSS), ikke er helt pålitelige.

En ny teknikk, nemlig gravitasjonlensing, blir brukt i [1]. Denne teknikken er fri for antagelser og gir mer pålitelige data fra målinger av storskalastrukturen. I mine senere analyser vil jeg bruke disse dataene.

Det finnes andre typer kosmologiske observasjoner, men jeg vil ikke gå inn på disse her siden jeg i mine analyser velger å ikke ta med disse. Grunnen er den store usikkerheten som ligger i disse dataene.

Kapittel 4

Perturbasjonsteori

Målet med kosmologisk perturbasjonsteori er å relatere fysikken i det tidlige univers, for eksempel inflasjonsfasen, til CMB-anisotropi og storskalastrukturen (LSS).

Vi kan se universet som isotropt og homogent når vi ser det på store skalaer. Men på små skalaer er universet på langt nær homogent og isotropt. Bare se på sosystemet vårt eller galaksene i vår lokale galaksehopp. Disse er inhomogeniteter i den kosmiske fordelingen av fotoner og materie. Fra figur 4.1 ser vi hvorfor disse er kompliserte å regne ut.

Fotonene er påvirket av gravitasjon og av Compton spredning med frie elektroner. Elektronene er koblet til protonene. Begge disse er også påvirket av gravitasjonskrefter. Metrikken som bestemmer gravitasjonens påvirkningskraft er påvirket av alle disse komponentene pluss nøytrinoene og den mørke materien. Det vil si at for å løse fordelingen til en komponent må en samtidig løse for alle de andre komponentene.

4.1 Boltzmannlikningen

Det er en systematisk måte å ta høyde for alle disse koblingene. Vi skriver ned en Boltzmannlikning for hver komponent i universet. Boltzmannlikningen i sin mest primitive form kan skrives

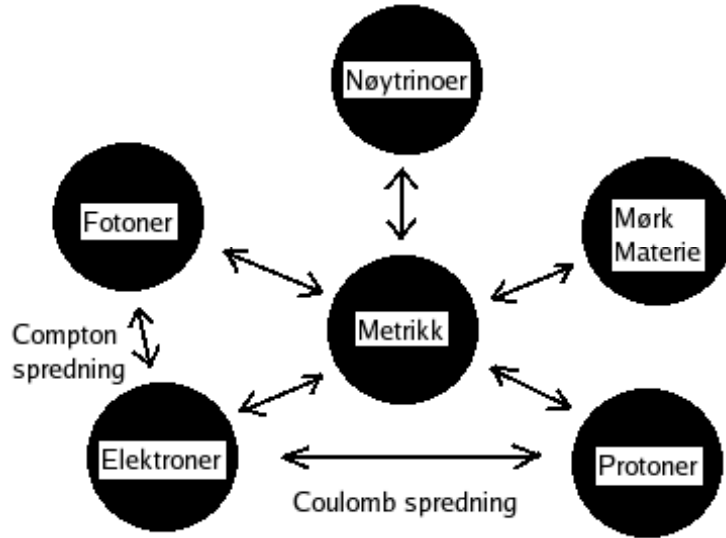
$$\frac{df}{dt} = C[f]. \quad (4.1.1)$$

Høyre side av denne likningen inneholder alle kollisjonsledd, mens venstre side forteller hvordan antall partikkler forandrer seg med tiden i et gitt element av faserommet.

La meg først begynne å se på venstre side av likning (4.1.1). Når en skal ta høyde for perturbasjoner rundt et flatt og jevnt univers som blir beskrevet av (3.3.1), må en først spesifisere metrikken. Mens et flatt og jevnt univers blir bestemt av en enkel funksjon $a(t)$, som bare er avhengig av tid og ikke av rommet, trenger det perturberte universet to nye funksjoner, Ψ og Φ , som begge avhenger av tid og rom. Metrikken kan da bli beskrevet ved hjelp av disse

$$\begin{aligned} g_{00}(\mathbf{x}, t) &= -1 - 2\Psi(\mathbf{x}, t) \\ g_{0i}(\mathbf{x}, t) &= 0 \\ g_{ij}(\mathbf{x}, t) &= a^2\delta_{ij}(1 + 2\Phi(\mathbf{x}, t)). \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Perturbasjonen til metrikken er Ψ , som korresponderer til newtonsk gravitasjonspotensial, mens Φ er perturbasjoner i romlig krumning. Siden perturbasjonene i universet er små ved



Figur 4.1: Illustrasjon på hvordan forskjellige komponenter påvirker hverandre i universet.

tider og skalaer av interesse, vil Ψ og Φ bli behandlet som små størrelser og de blir behandlet til første orden.

Før jeg går videre vil jeg presisere to tekniske poeng med metrikken jeg har valgt. Likning (4.1.2) inneholder bare skalarperturbasjoner. I prinsippet er det mulig at vårt univers også har vektor og tensorperturbasjoner. Hvis dette er tilfellet må $g_{\mu\nu}$ inneholde andre funksjoner utenom Ψ og Φ . Jeg vil her bare fokusere på skalarperturbasjoner siden disse er de eneste som kobler materieperturbasjoner og er viktigst i koblingene til fotonperturbasjonene. I [8] viser en at skalarperturbasjoner utvikler seg uavhengig av vektor og tensorperturbasjoner. Det vil si at selv om vi har disse ekstra perturbasjonene vil ikke dette påvirke skalarperturbasjonene til første orden. Dette blir kalt for frakoblingsteoremet.

Den andre egenskapen med likning (4.1.2) som er verdt å nevne er at dens form korresponderer til et valg av "gauge". Selv om jeg bare bruker skalarperturbasjonene, er det en del frihetsgrader i variablene en velger å beskrive fluktuasjonene med. Det er mulig å bruke en helt annen gauge som ser helt anderledes ut og fortsatt beskriver samme fysikken. I likning (4.1.2) bruker jeg det som blir kalt "konform newtonsk gauge". Denne formen er et resultat av Einsteins feltlikninger. Når $\Phi = \Psi = 0$ gir denne formen Friedemann-Robertson-Walker metrikken av den nullte ordens, flate kosmologien. Videre vil metrikken med $a = 1$, som vil si at vi ikke har ekspansjon, beskrive et svakt gravitasjonsfelt.

Jeg vil nå uttrykke den total deriverte av (4.1.1) som en sum av partiell deriverte

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i} \cdot \frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \hat{p}^i} \cdot \frac{d\hat{p}^i}{dt}. \quad (4.1.3)$$

Her er \hat{p}^i gitt som retningsvektoren til bevegelsesmengden p . I tillegg til å ha med venstre siden av (4.1.1), vekselvirker mange av komponentene med hverandre slik at en i tillegg må ha med kollisjonsleddet på høyre siden. Dette gjelder for eksempel ikke for nøytrinoer og mørk materie. Med en del regning som er blitt gjort analytisk i [8], kommer en til slutt frem

til uttrykket for boltzmannlikningen til de forskjellige komponentene. Jeg vil vise hvordan en kommer frem til uttrykket for nøytrinoene. For å finne boltzmannlikningen for de andre komponentene går en frem på omtrent samme måte.

4.1.1 Boltzmannlikningen for massive nøytrinoer

Jeg skal nå se hvordan perturbasjonene til massive nøytrinoer utvikler seg etter at de har skilt seg fra baryon-foton-plasmaet. For nøytrinoer vil høyre side av (4.1.1) være null siden de ikke vekselvirker med noe. Da får jeg

$$\frac{df_\nu}{dt} = 0. \quad (4.1.4)$$

Fordelingsfunksjonen f_ν avhenger av $x^\mu = (t, x, y, z)$ og firerimpulsen $P^\mu = dx^\mu/d\lambda$, hvor λ er en parameter som øker monotont langs partikkelens bane. Firerimpulsen er en bevart størrelse og siden jeg går ut fra at nøytrinoene har masse får jeg

$$P^2 = g_{\mu\nu}P^\mu P^\nu = -m^2. \quad (4.1.5)$$

Ved å bruke metrikken (4.1.2) får jeg ut fra denne likningen at

$$-(1 + 2\Psi)(P^0)^2 + g_{ij}P^i P^j = -m^2. \quad (4.1.6)$$

Jeg innføre videre at $p^2 = g_{ij}P^i P^j$ og får

$$P^0 = \frac{E}{\sqrt{1 + 2\Psi}}, \quad (4.1.7)$$

hvor $E = \sqrt{m^2 + p^2}$. Siden jeg er interessert i å sette opp likninger for første ordens perturbasjonsteori kan denne skrives

$$P^0 = E(1 - \Psi). \quad (4.1.8)$$

Vi vet at $\frac{dx^i}{dt} = \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dt} = \frac{P^i}{P^0}$ og ut fra dette regner [13] ut at

$$P^i = p\hat{p}^i \frac{1 - \Phi}{a}. \quad (4.1.9)$$

E blir i [8] brukt som en av de avhengige variablene, som betyr at den totale tidsderiverte av mørk-materie-fordelingen er

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p\hat{p}^i}{Ea} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial E} \frac{dE}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \hat{p}^i} \frac{d\hat{p}^i}{dt}. \quad (4.1.10)$$

Denne likningen vil jeg bruke som utgangspunkt for å finne boltzmannlikningen til nøytrinoene. Likningen har ingen kollisjonsledd siden mørk materie ikke vekselvirker med annen materie, noe som også gjelder for nøytrinoer. Nøytrinoer følger enkle Fermi-Dirac fordelinger som bare avhenger av størrelsen til bevegelsesmengden. Derfor er begge faktorene av første ordens perturbasjon i det siste leddet av denne likningen. Til laveste orden er f bare en funksjon av p . Det vil si at $\partial f / \partial \hat{p}^i$ er ulik null hvis vi bare har med perturbasjoner av f , og derfor er denne faktoren et første ordens uttrykk. I fraværet av perturbasjoner er det ingenting som får nøytrinoet til å forandre retning, slik at $d\hat{p}/dt$ må være av minst første orden i

perturbasjonene. Dermed er det siste leddet totalt av minst andre orden og vi kan neglisjere det. Dermed blir (4.1.10)

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p\hat{p}^i}{Ea} \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dt}. \quad (4.1.11)$$

Ved å gjøre en del utregninger som er vist i [8] kommer en til slutt frem til den kollisjonsløse Boltzmannlikningen for mørk materie, som også gjelder for nøytrinoer med masse

$$\frac{\partial f_\nu}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{p}{E} \frac{\partial f_\nu}{\partial x^i} - \frac{\partial f_\nu}{\partial E} \left[\frac{da/dt}{a} \frac{p^2}{E} + \frac{p^2}{E} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i p}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right] = 0. \quad (4.1.12)$$

Så langt har jeg gått ut fra at vi bare har kollisjonsløse partikler. Nå vil jeg ta med det faktum at nøytrinoer er fermioner. De vil da følge Fermi-Dirac fordelinger til laveste orden som nevnt i forrige kapittel,

$$f_\nu^{(0)} = \frac{1}{e^{p/T_\nu} + 1}. \quad (4.1.13)$$

Nøytrinoene falt ut av likevekt med baryon-foton-plasmaet ved $T \sim 1MeV$ mens de fremdeles var ultrarelativistiske. Man kan vise at de etter dette tidspunktet fortsetter å følge Fermi-Dirac fordelingen med $T_\nu \propto \frac{1}{a}$. Nøytrinoenes faseromsfordeling vil bare være påvirket av forandring i metrikken etter at nøytrinoene sluttet å vekselvirke med baryon-foton-plasmaet. Vi er ute etter disse gravitasjonelle forandringene i nøytrinoenes fordeling. For å inkludere disse fluktuasjonene i vår fordelingsfunksjon, definerer jeg en liten nøytrinoperturbasjon $\mathcal{N}(x, p, \hat{p}_i, t) \ll 1$ som

$$f_\nu = f_\nu^{(0)} + \frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial T_\nu} T_\nu \mathcal{N}. \quad (4.1.14)$$

Nullte-ordens uttrykket

Jeg setter nå inn (4.1.14) i uttrykket (4.1.12) og tar bare vare på nullte ordens leddene, det vil si de leddene som ikke har Ψ , Φ eller \mathcal{N} . Jeg står da igjen med

$$\frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial t} - \frac{p^2}{E} H \frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial E} = 0. \quad (4.1.15)$$

Ved å bruke at $\frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial t} = \frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial t}$ får jeg ut fra denne likningen at

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{p^2}{E} H. \quad (4.1.16)$$

Denne kan jeg skrive som

$$\frac{\partial E}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{p^2}{E} \frac{\partial a}{a \partial t}. \quad (4.1.17)$$

Jeg vet at $\frac{\partial E}{\partial p} = \frac{p}{E}$ og dermed får jeg

$$\frac{dp}{p} = \frac{da}{a}. \quad (4.1.18)$$

Siden jeg bruker Fermi-Dirac fordelingen er $T \partial f_\nu^{(0)} / \partial T_\nu = -p \partial f_\nu^{(0)} / \partial p$. Ved å bruke dette faktum kan jeg skrive om (4.1.18) til

$$\frac{dT_\nu}{T_\nu} = -\frac{da}{a}. \quad (4.1.19)$$

Ut fra dette ser jeg at nøytrinoenes temperatur går som nevnt over:

$$T_\nu \propto \frac{1}{a}. \quad (4.1.20)$$

Første-ordens uttrykket

Nå setter jeg igjenn inn (4.1.14) i uttrykket (4.1.12) men tar nå bare vare på leddene med første ordens perturbasjon. Jeg får

$$T_\nu \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial T_\nu} \mathcal{N} \right] + T_\nu \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{p}{E} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x^i} \frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial T_\nu} - \mathcal{N} T_\nu H \frac{p^2}{E} \frac{\partial}{\partial E} \left[\frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial T_\nu} \right] - \frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial E} \left[\frac{p^2}{E} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i p}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right] = 0. \quad (4.1.21)$$

Jeg bruker videre (4.1.16) og kjerneregelen for derivasjon til å skrive om det første uttrykket i likningen slik at

$$T_\nu \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial T_\nu} \mathcal{N} \right] = T_\nu \frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial T_\nu} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} + \mathcal{N} T_\nu H \frac{p^2}{E} \frac{\partial}{\partial E} \left[\frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial T_\nu} \right] = 0. \quad (4.1.22)$$

Ved å sette dette inn i (4.1.21) får jeg

$$T_\nu \frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial T_\nu} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} + T_\nu \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{p}{E} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x^i} \frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial T_\nu} - \frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial E} \left[\frac{p^2}{E} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i p}{a} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right] = 0. \quad (4.1.23)$$

Jeg vet at $\frac{\partial E}{\partial p} = \frac{p}{E}$ og da kan jeg skrive

$$\frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial T_\nu} = -\frac{p}{T_\nu} \frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial p} = -\frac{p}{T_\nu} \frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial E} \frac{\partial E}{\partial p} = -\frac{p^2}{ET_\nu} \frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial E}. \quad (4.1.24)$$

Når jeg setter dette inn i (4.1.23) og deler hele likningen på E står jeg igjen med

$$-\frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial E} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} - \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{p}{E} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x^i} \frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial E} - \frac{\partial f_\nu^{(0)}}{\partial E} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{E}{p} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} \right] = 0. \quad (4.1.25)$$

Dette betyr at den perturberte boltzmannlikningen for massive nøytrinoer er

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{p}{E} \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x^i} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\hat{p}^i}{a} \frac{E}{p} \frac{\partial \Psi}{\partial x^i} = 0. \quad (4.1.26)$$

For å gjøre likningen finere og lettere å løse, transformerer jeg likningen til Fourier rommet ved å bruke følgende definisjon

$$A(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} A(\mathbf{k}). \quad (4.1.27)$$

Ved å transformere til \mathbf{k} -rommet får jeg en mye mer nyttig form av likningen når jeg studerer på skalaer som er avhengig av materiefuktasjoner. Når jeg bruke denne definisjonen vil den romlige deriverte transformeres som $\frac{\partial}{\partial x^i} \rightarrow ik_i$. Jeg definerer også cosinus til vinkelen mellom bølgenummeret \mathbf{k} og nøytrinoenes retning $\hat{\mathbf{p}}$ som $\mu = \frac{\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{k}$. Ved å transformere likning (4.1.26) til Fourier rommet får jeg

$$\dot{\mathcal{N}} + \frac{1}{a} \frac{p}{E} ik_\mu \mathcal{N} = -\dot{\Phi} - \frac{1}{a} \frac{E}{p} ik_\mu \Psi. \quad (4.1.28)$$

For å forenkle likningen enda mer innfører jeg konform tid som et alternativ til tidsvariabelen til den kosmiske tiden t . Den er gitt på differensialform som

$$d\eta = \frac{dt}{a}. \quad (4.1.29)$$

Setter jeg dette inn i likning (4.1.28) og definerer ($' = \frac{d}{d\eta}$) får jeg til slutt

$$\mathcal{N}' + \frac{p}{E} ik_\mu \mathcal{N} = -\Phi' - \frac{E}{p} ik_\mu \Phi. \quad (4.1.30)$$

Jeg har nå funnet et matematisk uttrykk for en av pilene i figur 4.1. Denne likningen viser hvordan faseromsfordelingen av massive nøytrinoer og metrikken påvirker hverandre. Hvis $E = p$ blir (4.1.30) den perturberte boltzmannlikningen for masseløse nøytrinoer. Når nøytrinoene har masse får vi korreksjoner av likningen i ledda som inneholder E og p .

Metrikken er også påvirket av de andre kosmiske væskene. En må altså finne boltzmannlikningene for fotoner, baryoner og mørk kald materie for å gjøre meningsfulle beregninger. Disse blir funnet i [8].

Men disse likningene håndterer bare perturbasjoner til metrikken. Hva som bestemmer samspillet mellom materie og geometrien er Einsteins feltlikning (3.2.2). Vi trenger altså å oversette perturbasjonene i metrikken til perturbasjoner i Einstein-tensoren for å få perturbasjonene på venstre side av Einsteins feltlikning. Og for å finne høyre side av (3.2.2) trenger vi å finne et uttrykk for den perturberte energi-impuls-tensoren.

4.2 De perturberte Einsteinlikningene

Einsteinlikningene relaterer perturbasjoner i metrikken til perturbasjoner i materie og stråling. Jeg vil ikke gå i detalj på hvordan en finner disse likningene ettersom det er en ganske komplisert utregning. Men det [8] i hovedsak gjør er å ta to komponenter av Einsteins feltlikning $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$, og finner to likninger som beskriver skalarperturbasjonene. En finner at bidraget til energi-impulstensoren f_i og antall indre frihetsgrader g_i er gitt ved

$$T_\nu^\mu = g_i \int \frac{dP_1 dP_2 dP_3}{(2\pi)^3} (-\det g_{\alpha\beta})^{-1/2} \frac{P^\mu P_\nu}{P^0} f_i. \quad (4.2.1)$$

Siden metrikken er diagonal blir

$$(-\det g_{\mu\nu})^{-1/2} = a^{-3}(1 - \Psi - 3\Phi), \quad (4.2.2)$$

til første orden i Ψ og Φ .

4.2.1 Den perturberte Einsteinlikningen for tidkomponenten

Den første likningen jeg skal frem til beskriver tidkomponenten $\delta G_0^0 = 8\pi \delta T_0^0$. Ved å utføre utregninger på ricciskalaren og Christoffelsymbolene kommer [8] frem til den perturberte Einsteintensoren

$$\delta G_0^0 = -6H\dot{\Phi} + 6H^2\Psi - 2\frac{k^2}{a^2}\Phi. \quad (4.2.3)$$

Energi-impulstensoren består av bidrag fra alle komponentene som universet består av,

$$T_0^0 = - \sum_{komp(i)} g_i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} E_i f_i. \quad (4.2.4)$$

I [13] blir blant annet bidraget for fotoner regnet ut. Det perturberte bidraget ble funnet til å være

$$\delta T_0^0 = -4\rho_\gamma \Theta_0. \quad (4.2.5)$$

For å regnet ut bidraget til massive nøytrinoer må en gjennom en del numerisk regning noe jeg ikke vil gjøre her, men for masseløse nøytrinoer ser bidraget likt ut som for fotoner. Jeg definerer bidraget for massive nøytrinoer til

$$\delta T_0^0 = \Upsilon_\nu(\mathcal{N}). \quad (4.2.6)$$

Bidraget fra kald mørk materie og baryoner er gitt som

$$\delta T_0^0 = -\rho_i \delta_i. \quad (4.2.7)$$

Ut fra dette får jeg følgende likning fra (4.2.3)

$$-3H\dot{\Phi} + 3H^2\Psi - \frac{k^2}{a^2}\Phi = -4\pi G(\rho_{dm}\delta_{dm} + \rho_b\delta_b + 4\rho_\gamma\Theta_0 + \Upsilon_\nu(\mathcal{N})). \quad (4.2.8)$$

Ved å skifte til komform tid får jeg en likning som er litt mer håndterlig og ser ut som følger

$$k^2\Phi + 3\frac{a'}{a}\left(\Phi' - \Psi\frac{a'}{a}\right) = 4\pi G a^2(\rho_{dm}\delta_{dm} + \rho_b\delta_b + 4\rho_\gamma\Theta_0 + \Upsilon_\nu(\mathcal{N})). \quad (4.2.9)$$

Dermed har jeg fått den første likningen som beskriver tidkomponentene, nå gjenstår det å finne den andre likningen som beskriver romkomponentene

4.2.2 Den perturberte Einsteinlikningen for romkomponentene

Den andre likningen for romkomponentene er gitt som $\delta G_i^i = 8\pi\delta T_j^i$. For å unngå å konfronteres med trasen til G_j^i bruker [8] en prosjeksjonsoperator slik at en får

$$(\hat{k}_i\hat{k}^j - (1/3)\delta_j^i)G_j^i = \frac{2k^2}{3a^2}(\Psi + \Phi). \quad (4.2.10)$$

En må gjøre de samme operasjonene på T_j^i som for T_0^0 gitt en komponent, slik at en totalt får

$$(\hat{k}_i\hat{k}^j - (1/3)\delta_j^i)T_j^i = \sum_{komp(i)} g_i \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \mathcal{P}_2(\mu) \frac{p^2}{E} f_i. \quad (4.2.11)$$

Her er \mathcal{P}_2 Legendrepolyomet av grad 2. Denne likningen viser seg å være forskjellige fra null for bare masseløse nøytrinoer og fotoner. Når nøytrinoene er ikke-relativistiske, blir denne likningen forskjellig fra null bare for fotoner, slik at vår andre likning for den perturberte Einsteinlikningen blir

$$k^2(\Phi + \Psi) = -32\pi G a^2[\rho_\gamma\Theta_2]. \quad (4.2.12)$$

4.3 Skalarfeltperturbasjonene i inflasjonsfasen

Før jeg skal se på løsningene til perturbasjonslikningene, vil jeg se på hvordan initialbetingelsene til disse perturbasjonene ble satt i metrikken i løpet av inflasjonsfasen. Målet i dette avsnittet er altså å finne perturbasjonsspekteret til Ψ som kommer fra inflasjon. I løpet av inflasjonsfasen ble det skapt skalarperturbasjoner fra vakuumfluktuasjoner i inflasjonsfeltet, som er såkornene for tetthetsperturbasjonene og temperaturanisotropi. Skalarfeltet består da av en homogen og en perturbert del

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \phi^{(0)}(t) + \delta\phi(\mathbf{x}, t). \quad (4.3.1)$$

For å finne en likning for den perturberte delen av skalarfeltet, bruker [8] bevaring av energi-impulstensoren. Jeg vil ikke regne ut dette her, bare vise resultatet

$$\delta\ddot{\phi} + 2aH\delta\dot{\phi} + k^2\delta\phi = 0. \quad (4.3.2)$$

For å finne styrkespekteret til denne likningen skrives den om til en harmonisk oscillator, og derifra brukes grunnleggende regler for kvantifisering av en oscillator. Dette er vist i [8]. Styrkespekteret av fluktuasjonene i $\delta\phi$ blir da funnet til å være

$$P_{\delta\phi} = \frac{H^2}{2k^3}. \quad (4.3.3)$$

Jeg har nå sett bort fra perturbasjonene til metrikken. Når bølgelengden av perturbasjonene er av størrelseorden horisonten eller mindre, er denne tilnærmingen korrekt. Men ved slutten av inflasjonen har metrikkperturbasjonene blitt viktige. Det vil si at selv om de inflasjonsinduserte perturbasjonene starter alle $\delta\phi$, vil de ende opp som lineære kombinasjoner av Ψ og perturbasjoner til energi-impulstensoren. For å finne disse sammenhengene må en finne lineære kombinasjoner som er bevart på utsiden av horisonten. Disse perturbasjonene er skalainvariante, det vil si at de er konstante og ikke avhengig av k . Verdien av disse bevarte lineære kombinasjonene er bestemt av $\delta\phi$ ved horisontkryssing. Etter en del regning som blir gjort i [8] får vi en sammenheng mellom styrkespekteret til Ψ rett etter inflasjonsfasen og $\delta\phi$ ved horisontkryssing

$$P_{\Psi} = \frac{4}{9} \left(\frac{aH}{\dot{\phi}^{(0)}} \right)^2 P_{\delta\phi}|_{aH=k}. \quad (4.3.4)$$

En annen nyttig måte å uttrykke styrkespekteret til skalarperturbasjonene er å eliminere $\dot{\phi}^{(0)}$ til fordel for slow-roll parameteren ϵ , slik at vi får

$$P_{\Psi} = P_{\Phi}(k) = \frac{8\pi G}{9k^3} \frac{H^2}{\epsilon} |_{aH=k}. \quad (4.3.5)$$

Første delen av uttrykket stammer fra det faktum at $\Psi = -\Phi$ rett etter inflasjonsfasen.

Nå har vi sett på hvordan perturbasjonene ble satt inn i metrikken ved hjelp av skalarperturbasjoner i inflasjonsfasen. Hvordan disse skalarfeltfluktuasjonene ble til vil jeg ikke komme inn på her, men jeg kan nevne at det er vakuumfluktuasjoner som står for dette. Før jeg går videre og ser på løsningene av perturbasjonslikningene jeg har fått, vil jeg se litt på spektralindeksen som er utledet i [3] og [8]. Denne parameteren er nyttig når en skal beskrive inflasjonsfasen og jeg vil bruke den senere i oppgaven.

Spektralindeksen

Avvik fra en nøyaktig eksponensiell utvidelse av universet i inflasjonsfasen vil også feste seg i tetthetsfluktuasjonene med et spekter som avviker fra den skalainvariante. Det vil si at en ut fra dette kan finne en test av inflasjonen. Vi kan definere dette avviket som

$$n_s - 1 \equiv \frac{d \ln P_\Phi(k)}{d \ln k} \iff k^{(n_s-1)} \propto P_\Phi(k), \quad (4.3.6)$$

hvor n_s er den effektive spektralindeksen. Fra denne likningen ser vi at for $n_s = 1$ får en et skalainvariant styrkespekter. Hvis $n_s < 1$ vil en få store fluktasjoner på store skalaer og mindre på de små skalaene, mens hvis $n_s > 1$ vil en få store fluktasjoner på små skalaer og mindre på de store skalaene. Ut fra dagens observasjoner tyder alt på at $n_s < 1$.

Jeg vil nå uttrykke (4.3.6) med slow-roll parametrene η og κ . Ved å bruke likningen for perturbasjonene til metrikken sammen med den deriverte av slow-roll parameteren $\frac{d\epsilon}{d \ln k} = 2\epsilon\kappa - 4\epsilon^2$, får jeg til slutt uttrykket

$$n_s - 1 = -6\epsilon + 2\kappa. \quad (4.3.7)$$

Siden slow-roll parametrene krever at $\epsilon \ll 1$ og $\kappa \ll 1$, blir konklusjonen: Inflasjon forutsier at variasjonene av spekteret er liten i intervallet $\Delta \ln k \sim 1$.

Vi kan også regne ut graden av forandring av n_s kalt n_{run}

$$n_{run} = \frac{dn_s}{d \ln k}. \quad (4.3.8)$$

4.4 Løsninger av perturbasjonslikningene

Vi har før i dette kapittelet vist hvordan en kommer frem til de forskjellige perturbasjonslikningene, som er viktige i kosmologien, og hvordan disse perturbasjonene ble til i utgangspunktet. Disse perturbasjonslikningene kan ha analytiske løsninger i grensene hvor en går ut fra at universet blir dominert av en komponent som bestemmer utviklingen av metrikkperturbasjonene. Den eller de mindre dominerende kosmologiske væskene følger da den gitte metrikkperturbasjonen uten å ha noen effekt på den. Vi har et eksempel av dette dypt inne i den materiedominerte fasen, hvor materiefluktuasjonene bestemmer perturbasjonsutviklingen, og de forskjellige andre kosmiske væskene kan bli sett på som uavhengig.

Jeg vil nå se litt på fysikken som følger av disse perturbasjonslikningene. Hvis en skal løse dem helt må en gjennom en del numerisk regning, noe jeg ikke skal gjøre her. Jeg vil først se på et flatt nøytrinoløst Λ CDM-univers før jeg tar for meg dette universet når jeg har med massive nøytrinoer.

4.5 Den flate Λ CDM-universmodellen

Før dette universet ble Λ -dominerende gikk det gjennom en strålingsdominert og en materiedominert periode. Perturbasjonene i disse periodene utviklet seg forskjellig, og en kan se spor av dette fra for eksempel CMB-spekteret og storskalastrukturen.

4.5.1 Strålingsdominert fase

Etter at universet hadde gått gjennom inflasjonsfasen hvor det ble laget perturbasjoner i selve metrikken, var universet strålingsdominert. Strålingsvæsken samlet seg etter disse perturbasjonene, noe som igjen påvirket metrikken på grunn av gravitasjonell kollaps. Men når en får en høy konsentrasjon av fotoner vil dette også skape et trykk som virker i motsatt retning av gravitasjonskreftene. Skalaer under Jeans-lengden,

$$\lambda_J = 2\pi c_s \sqrt{2/3} \left(\frac{3}{8\pi G\rho} \right)^{1/2} = 2\pi \frac{a(t)}{k_j(t)}, \quad (4.5.1)$$

vil gi et trykk som motvirker veksten av perturbasjoner, og disse modene vil oscillere. Disse oscillasjonene er frøene til de akustiske toppene vi ser i CMB-styrkespekteret idag.

En er også interessert i mørk materie og materiefluktuasjoner siden de vil dominere metrikkperturbasjonene i senere tider. Disse kan vi idag se gjennom observasjoner av storskalasstrukturen. Mørk materie har i prinsippet λ_J lik null siden de ikke vekselvirker og derfor ikke kan skape trykk. Mørk materie kan derfor kollapse innenfor λ_J grensen gitt i 4.5.1. Men dette går tregt i denne strålingsdominerte epoken, siden metrikkperturbasjonene her stammer fra strålingsoscillasjoner.

Samspillet mellom oscillasjoner i foton-baryon-plasmaet og kald mørk materie kan bli studert når en sammenlikner CMB og LSS-styrkespekteret. I CMB-spekteret har vi en ganske direkte observasjon på perturbasjonene i foton-baryon-plasmaet rett etter at materie og stråling var i likevekt. Her er de akustiske toppene ganske kraftige. I dagens materie-styrkespekter kan vi se små oscillasjoner som stammer fra oscillasjonene i metrikken på skalaer $\lambda < \lambda_J$ i det tidlige univers. Hvis materieinnholdet av universet bare var baryonisk, ville disse fluktuasjonene i materie-styrkespekteret vært mye større.

På skalaer større enn λ_J og mindre enn hubbleradiusen $R_H = \frac{1}{aH}$ er det ikke noe trykk som kan motvirke gravitasjonell kollaps. På disse skalaene kan en ut fra perturbasjonslikningene se at perturbasjonene vil vokse som $\propto a^2$ i den strålingsdominerende fasen. Dette gjelder bare for den dominerende strålingskomponenten og ikke materiekomponenten. Materiefluktuasjonene viser seg å være konstant på denne skalaen. Dette kommer av at den raske utvidelsen av universet vil gjøre at klumping av materie vil være vanskeligere, og denne effekten vil nesten viske ut effekten av gravitasjonell kollaps i den strålingsdominerte fasen.

Fra (4.5.1) ser jeg at $\lambda_J \propto \rho^{-1/2}$, som betyr at i den strålingsdominerte fasen er $\lambda_J \propto a^2$. Dette betyr at etter hvert som universet utvider seg vil større og større skalaer være innenfor Jeans lengden, og disse kan ikke hope seg videre i det lineære regimet.

4.5.2 Materiedominert fase

De oscillerende effektene som er beskrevet over krever at den dominerende kosmologiske energikomponenten kan utøve trykkraft. Denne effekten kan en bare få i den første strålingsdominerte fasen etter Big Bang. I den mørke materiedominerte fasen som følger vil λ_J være null, og strukturer kan vokse på alle skalaer siden det ikke er noen trykkrefter assosiert med den mørke materiekomponenten.

Det viser seg at i løpet av den materiedominerende fasen vil perturbasjoner på alle skalaer vokse som $\delta_m \propto a$. Dette blir litt mer komplisert når jeg har med effekten av "free-streaming", som jeg vil komme tilbake til når jeg tar med massive nøytrinoer i universet.

4.5.3 Λ -dominert fase

Den neste epoken universet går gjennom er den Λ -dominert fasen. I denne fasen vil universets utvidelsehastighet akselerere og dette vil føre til at metrikkperturbasjonene blir mindre, og derfor vil dannelsen av strukturer bremses opp. Vakuumenergien Λ klumper seg ikke, og når vi tenker oss et flatt univers vil en større verdi av Ω_Λ bli kompensert av en mindre verdi av Ω_m . Dette vil si at en får mindre materie som kan klumpe seg. Altså vil en stor Ω_Λ bety mindre opphoping av materie.

4.6 Massive nøytrinoer og strukturformasjon

Nøytrinoer vekselvirker svakt med materie og er derfor viktige i astrofysikken. Hvor andre partikler blir fanget eller bare kan propagere gjennom veldig trege diffusjonsprosesser, kan nøytrinoer flykte fra dette. Nøytrinoer kan altså koble regioner av materie som ellers ville vært isolert fra hverandre. Siden de nesten er masseløse beveger de seg tilnærmet med lysets hastighet, noe som gjør energioverføringer effektive. Dessuten fører mangelen av elektrisk ladning til at nøytrinoer kan følge geodetbaner selv i sterke magnetiske felt. Disse egenskapene gjør at massive nøytrinoer gir effekter på universet i en helhet, som er viktige når en skal kartlegge dets utvikling.

4.6.1 Effekten av nøytrino "free streaming"

"Free-streaming" effekten er en effekt som forekommer i alle kollisjonsløse kosmologiske væsker. Det stammer fra det faktum at veksten av små overtettheter tar en gitt tid. Hvis vi har en overtetthet med en typisk lengdeskala λ_0 , og den består av partikler som er kollisjonsløse og beveger seg hurtig, vil denne overtettheten ha en kollapsestid på $\tau_c \sim \frac{1}{\sqrt{G\rho_m}}$. Hvis partikkelen som lager overtettheten har en stor hastighet, kan de forflytte seg lenger enn λ_0 i tidsintervallet τ_c . Da vil ikke overtettheten være overtett lenger, og strukturer vil ikke vokse på disse skalaene.

Hastigheten til partikkelen vil være avhengig av massen, slik at skalaen som denne "free streaming" effekten påvirker også vil være avhengig av massen. Dette er viktig å presisere for å forstå hvorfor massive nøytrinoer har en effekt på observasjonene av CMB og LSS. Disse nøytrinoene har veldig små masser og vil gi et avtrykk i strukturformasjonene av universet, siden de utjevner strukturer på små skalaer.

Den typiske "free streaming" skalaen kan bli funnet fra (4.5.1) og er gitt som

$$\lambda_{FS} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{v_{th}(t)}{H(t)} = 2\pi \frac{a(t)}{k_{FS}}. \quad (4.6.1)$$

Her er v_{th} den termiske hastigheten av partikkelen vi ser på og k_{FS} er den medfølgende "free-streaming" bølgelengden. For ikke-relativistiske nøytrinoer er den termiske hastigheten relatert til den forventede verdien av bevegelsesmengden $\langle p_\nu \rangle = m_\nu v_{th}$. Jeg får da et uttrykk for hastigheten

$$v_{th}^\nu = \frac{\langle p_\nu \rangle}{m_\nu} = \frac{3T_\nu}{m_\nu} = \frac{3T_\nu^0}{m_\nu} \left(\frac{a_0}{a} \right) = 1.5 \times 10^5 a^{-1} (1+z) \left(\frac{1\text{eV}}{m_\nu} \right) m/s. \quad (4.6.2)$$

Rødforskyvningen er gitt som $1+z = \frac{a_0}{a}$ og $a_0 = 1$ er dagens størrelse på universet. Det vil si at hvis den typiske størrelse på nøytrinomassen er $\sim 0.1\text{eV}$, vil nøytrinoene ha en termisk

hastighet på $v_{th}^\nu \sim 10^6 m/s$ idag. Ved bruk av Friedmanlikningene fra kapittel 3 kan jeg i en epoke der Ω_r er neglisjerbar skrive (4.6.1) som

$$\lambda_{FS}(t) = 2\pi \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{v_{th}(t)}{H_0 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m a^{-3}}} = \frac{7.7}{a \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m a^{-3}}} \left(\frac{1eV}{m} \right) h^{-1} Mpc. \quad (4.6.3)$$

Det er også nyttig å ha informasjon om k_{FS} , og ved å bruke (4.6.1) og (4.6.3) blir denne

$$k_{FS}(t) = 0.82 a^2 \sqrt{\Omega_\Lambda + \Omega_m a^{-3}} \frac{m_\nu}{eV} h Mpc^{-1}. \quad (4.6.4)$$

Ved å bruke $m_\nu = 0.1 eV$ får vi at $k_{FS} \sim 0.1 h Mpc^{-1}$ i dag. Dette er skalaer som det er normalt å tenke seg at ikke-lineære effekter i materiekklumpingen blir viktige. LSS observasjoner som SDSS observerer skalaer rundt $k \sim (0.01 - 0.02) h Mpc^{-1}$. Det betyr at en vil kunne finne effekter fra "free streaming" skalaen med slike observasjoner.

For ikke-relativistiske nøytrinoer i den materiedominerte fasen, vil "free streaming" bølgelengden fortsette å vokse som $\lambda_{FS} \propto (aH)^{-1} t^{1/3}$. Men dette er saktere enn skalafaktoren som går som $a \propto t^{2/3}$. Derfor vil den medfølgende "free streaming" bølgelengden gå som $\lambda_{FS}^C \propto \lambda_{FS}/a \propto t^{-1/3}$ og altså minke. Ultra-relativistiske nøytrinoer vil ha "free streaming" bølgelengder som tilsvarer hubbleradiusen og øke i den materiedominerte fasen. Nøytrinoer som blir ikke-relativistiske i den materiedominerte fasen vil oppleve en maksimum verdi av λ_{FS}^C , som vil si en minimum verdi k_{nr} for den tilsvarende medfølgende bølgelengden. I [17] finner en den til å være

$$k_{nr} \approx 0.018 \Omega_m^{1/2} \left(\frac{m_\nu}{1eV} \right)^{1/2} h Mpc^{-1}. \quad (4.6.5)$$

Perturbasjoner på skalaer mindre enn k_{nr} vil bli dempet på grunn av nøytrinoenes "free streaming". På skalaer mye større enn "free streaming" skalaen vil nøytrinoer som har gått gjennom en ikke-relativistisk transaksjon oppføre seg som kald mørk materie. Det vil si at moder som er $k < k_{nr}$ ikke vil være påvirket av "free streaming", og vil oppføre seg som en Λ CDM-modell. Vi ser disse effektene på figur 4.2.

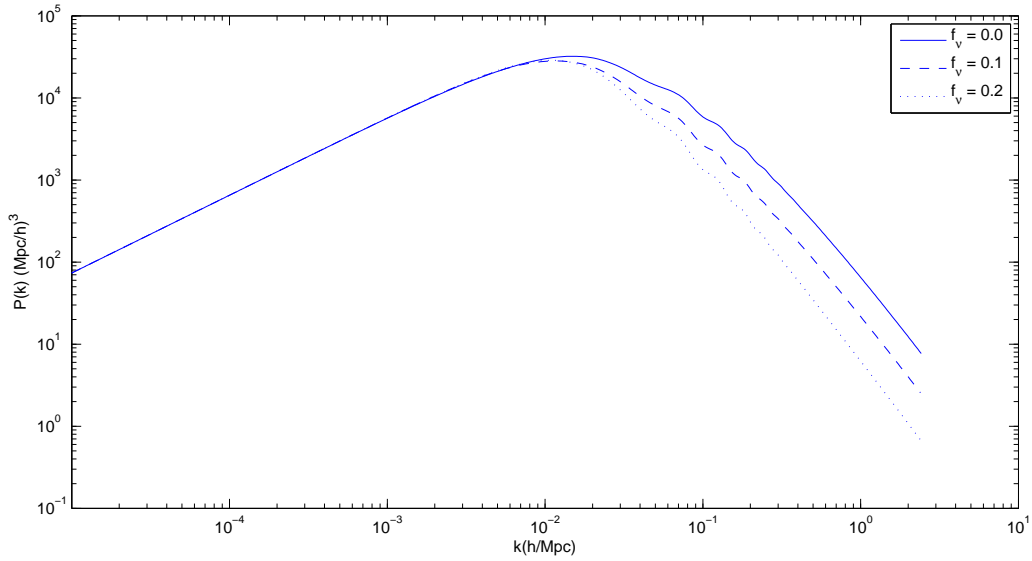
I Λ CDM-modellen er effekten av massive nøytrinoer på strukturformasjonen bestemt av parameteren $f_\nu = \Omega_\nu/\Omega_m$. Hvis vi går ut fra at effekten fra nøytrinoene på metrikperturbasjonene er neglisjerbare, vil vi forvente at styrke-spekteret i en modell med massive nøytrinoer ser ut som

$$P(k) = \begin{cases} < \delta_{CDM}^2 > & \text{for } k < k_{nr} \\ (1 - f_\nu)^2 < \delta_{CDM}^2 > & \text{for } k \gg k_{nr}, \end{cases} \quad (4.6.6)$$

hvor det er et område med transaksjon fra ultrarelativistiske nøytrinoer til ikke-relativistiske nøytrinoer i mellom. Men vi kan ikke se bort fra effekten av massive nøytrinoer på den perturberte metrikken, spesielt ikke på skalaer $k \gg k_{nr}$. På disse modene viser [17] at

$$\frac{P(k)_{f_\nu} - P(k)_{f_\nu=0}}{P(k)_{f_\nu}} \approx -8f_\nu. \quad (4.6.7)$$

Dette gir en utjevning av styrkespekteret som er fire ganger større en hva en skulle forvente av (4.6.6). I (4.6.6) går en ut fra at nøytrinoene oppfører seg uavhengig av resten av universet. Men dette er ikke tilfellet og derfor kommer en i stedet frem til (4.6.7). Effekten som massive nøytrinoer har på styrkespekteret er grunnet en del grunnleggende effekter:



Figur 4.2: Materiestyrrkespekteret for nøytnoer med og uten masse i ett flatt Λ CDM univers. Her er $f_\nu = \Omega_\nu/\Omega_m$. Plottene ble laget i CAMB.

* I [17] har en funnet at når f_ν får en større verdi vil dette føre til at a_{eq} blir større med en faktor $(1 - f_\nu)^{-1} = 1.1$. Dette vil si at materieperturbasjonene har mindre tid å vokse på. Dessuten vil en økning av Ω_ν føre til en minking av Ω_c i et flatt univers.

* Det faktum at nøytnoer ikke klumper seg på skalaer som er $k \gg k_{nr}$, gjør at de til en viss grad vil jevne ut størrelsen av metrikkpotensialet Ψ og Φ , og derfor vil utviklingen av materieperturbasjonene gå saktere.

Kapittel 5

Parameterestimering

I min masteroppgave skal jeg bruke en programpakke kalt CosmoMC. Jeg vil i dette kapitlet gå gjennom egenskapene til Markov chain Monte Carlo (MCMC) metoden, og hvordan denne blir brukt i CosmoMC koden til å estimere kosmologiske parametre.

Først vil jeg gå gjennom sannsynlighetsfunksjonen som er sentral i kjøringene med CosmoMC. Dette kapitlet bygger på [21] og [18]

5.1 Likelihoodfunksjonen

Likelihoodfunksjonen \mathcal{L} er viktig når en skal bruke kosmologisk data til å estimere parametre i en kosmologisk modell. \mathcal{L} er definert som sannsynligheten for et gitt datasett gitt en modell. Hvis vi har en vektor av observerte størrelser $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_n)$, og en vektor av uobserverte parametre fra en kosmologisk modell $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_d)$, vil likelihoodfunksjonen være gitt som

$$\mathcal{L} = P(\mathbf{z}|\theta)P(\theta). \quad (5.1.1)$$

Her kan f.eks \mathbf{z} være et datasett fra målinger av CMB, mens θ er frie kosmologiske parametre som for eksempel Ω_m , M_ν osv. $P(\theta)$ er sannsynligheten for θ gitt det vi vet før observasjonene \mathbf{z} ble gjort. $P(\mathbf{z}|\theta)$ er sannsynligheten for en observert størrelse \mathbf{z} gitt data θ .

Jeg er interessert i sannsynligheten for parametrene gitt observasjonene $P(\theta|\mathbf{z})$. Ved å bruke Bayes teorem blir dette

$$P(\theta|\mathbf{z}) = \frac{P(\mathbf{z}|\theta)P(\theta)}{\int P(\mathbf{z}|\theta)P(\theta)d\theta} = \frac{\mathcal{L}}{m(\mathbf{z})}, \quad (5.1.2)$$

hvor $m(\mathbf{z})$ blir kalt marginaliseringen av \mathbf{z} . Jeg ser at $P(\theta|\mathbf{z}) \propto \mathcal{L}$, og det er derfor mest praktisk å bruke \mathcal{L} i stedet for $P(\theta|\mathbf{z})$ når vi sammenlikner sannsynlighet for forskjellige datasett.

For å finne sannsynlighetsfordelingen av en parameter θ_i i parametervektoren, trenger en å integrere den totale sannsynlighetfunksjonen over alle andre parametre

$$P(\theta_i|\mathbf{z}) = \int \dots \int P(\theta|\mathbf{z})d\theta_1 \dots d\theta_{i-1}d\theta_{i+1} \dots d\theta_d. \quad (5.1.3)$$

Denne prosessen blir kalt marginalisering. Når jeg referer til to dimensjonale konturplot blir $P(\theta|\mathbf{z})$ integrert over alle parametre unntatt de to relevante parametrene.

For å sammenlikne modeller med forskjellige parameterverdier er det vanlig å bruke χ^2 verdier. χ^2 er definert som $\chi^2 = \sum_i \frac{(E_i - z_i)^2}{E_i}$, hvor E_i er verdien gitt fra en teoretisk modell. Det finnes en enkel relasjon mellom \mathcal{L} og χ^2 ,

$$\chi^2 \approx -2\log\mathcal{L}, \quad (5.1.4)$$

gitt fra [21].

5.2 CosmoMC

Jeg gjør mesteparten av mine analyser i denne masteroppgaven ved hjelp av en kode kalt CosmoMC [18]. Denne koden bruker en Markov Chain Monte Carlo (MCMC) tilnærming ved å gjentatte ganger kjøre gjennom Boltzmannkoden CAMB [19]. CAMB er igjenn basert på CMBFAST [20]

CAMB tar kosmologiske parametre og beregner kosmologiske størrelser som CMB og LSS-styrkespekteret ved lineær perturbasjonsteori og "Line of sight integration" [19]. Dette gir oss teoretiske modeller som kan sammenliknes med observerte data, og ut fra dette kan korresponderende verdier av likelihoodfunksjonen bli beregnet.

En typisk kosmologisk modell har $d \sim 10$ frie parametre. For å finne foretrukne områder for alle disse parametrene trenger en informasjon om \mathcal{L} i et stort antall punkter i dette d-dimensionelle parameterrommet. Dette gjelder også selv om en bare er interessert i sannsynlighetsfordelingen til en parameter, for eksempel nøytrinomassen. Til dette trengs det en effektiv metode for å velge hvilke parametre som skal inn i Boltzmannkoden for å få pålitelige grenser med så få utregninger som mulig. Her kommer MCMC inn i bildet. MCMC metoden er ekstremt effektiv til å få relevante data av punkter i parameterrom i høyere dimensjoner. Den har også den egenskapen at kjøringen skales bortimot linjært til d, som gjør at en kan inkludere mange parametre uten at det koster datamaskinen all verdens.

En "Markov chain" er en matematiske kjede av fordelinger i parameterrommet. En gitt posisjonen i parameterrommet er bare basert på den forrige posisjonen. En kan generere markovkjeder som har den egenskapen at den konvergerer til stasjonære fordelinger. I praksis vil en vanligvis lage kjeder ved at en virrevandrer går gjennom parameterrommet i stedet for å bruke fordelingen direkte. Denne virrevandrer vil etter tilstrekkelig antall steg gi den totale sannsynlighetsfordelingen.

I CosmoMC vil en at parameterfordelingen av de teoretiske parametrene skal konvergere til en tilfredstillende verdi, gitt datasettene en sammenligner med. Denne stasjonære fordelingen kaller en for $P(\theta)$, hvor θ er en vektor i det d-dimensjonale parameterrommet. Algoritmen brukt i CosmoMc til å få lenkene til å konvergere til denne fordelingen er Metropolis-Hasting algoritmen.

Generelt vil virrevandrer gå fra et punkt i parameterrommet θ_1 til det neste punktet θ_2 med en overgangs-sannsynlighet $T(\theta_1, \theta_2)$. Metropolis-Hasting algoritmen er en metode som genererer denne overgangs-sannsynligheten på en slik måte at lenkene ender opp ved ønsket stasjonære verdier. Dette blir gjort basert på en tetthet $q(\theta_n, \theta_{n+1})$ som blir foreslått. Denne tettheten vil ideelt ligge i nærheten av den stasjonære fordelingen P , som gjør at den konvergerer forttere. En har ofte gode ideer om hvilke stasjonære fordelingen en forventer i problemstillingene en ser på. Derfor kan jeg gi algoritmen gode initialverdier på q .

Den foreslåtte tettheten q blir brukt til å foreslå et nytt punkt θ_{n+1} som virrevandrer kan gå til. Da tar Metropolis-Hastings algoritmen det foreslåtte punktet gjennom en test for å

akseptere om virrevandreren kan gå dit. Det blir akseptert med en sannsynlighet $\alpha(\theta_n, \theta_{n+1})$. Overgangs-sannsynligheten blir da

$$T(\theta_n, \theta_{n+1}) = \alpha(\theta_n, \theta_{n+1})q(\theta_n, \theta_{n+1}). \quad (5.2.1)$$

Den aksepterte sannsynligheten er gitt som

$$\alpha(\theta_n, \theta_{n+1}) = \min\{1, \frac{P(\theta_{n+1})q(\theta_{n+1}, \theta_n)}{P(\theta_n)q(\theta_n, \theta_{n+1})}\}. \quad (5.2.2)$$

Dette betyr at sannsynligheten for å bevege seg til et punkt vil bli redusert hvis foreslått bevegelse vil føre kjeden til en plass med mindre verdi av \mathcal{L} . Dette vil føre til at kjeden vil konvergere til den stasjonære verdien over tid.

I CosmoMC fungerer dette på den måten at virrevandreren starter i en tilfeldig posisjon i parameterrommet θ^0 . Deretter kaller CosmoMC CAMB for å beregne CMB og LSS-styrkespekteret og den bakliggende kosmologiske utviklingen med parametersettet θ^0 . CAMB sammenlikner så det teoretiske styrkespekter med foretrukket datasett, og gir en sannsynlighetsverdi til CosmoMC. Så bruker CosmoMC forventet parameterfordeling gitt av brukeren og plukker et nytt sett av tilfeldige parameter θ^1 . CAMB blir kalt og beregner sannsynligheten for θ^1 . På bakgrunn av $\mathcal{L}(\theta^1)$ og $\mathcal{L}(\theta^0)$ må CosmoMC bestemme om en skal akseptere det nye punktet i kjeden eller ikke. Et tilfeldig tall $0 < u < 1$ blir generert og θ^1 blir akseptert i kjeden hvis u tilfredstiller

$$u < \min\{1, \frac{P(\theta^1)P(\mathbf{z}|\theta^1)q(\theta_n, \theta_{n+1})}{P(\theta^0)P(\mathbf{z}|\theta^0)q(\theta_n, \theta_{n+1})}\}. \quad (5.2.3)$$

Hvis foreslått θ^1 blir akseptert, vil en ny parametervektor bli plassert i kjeden og prosessen vil gjentas med et nytt forslag θ^2 . Hvis foreslått θ^1 blir avvist, vil θ^1 bli satt til samme verdi som θ^0 og et nytt punkt θ^2 vil bli foreslått i stedet.

En bruker vanligvis en "burn-in" tid på ca 1000 kjedesteg. Etter denne "burn-in" tiden skal kjeden ha konverget til den stasjonære fordelingen som blir brukt til å beregne parameterens konfidensintervall. For virrevandreren vil parameterverdien i θ^l være avhengig av parametervektoren i forrige steg θ^{l-1} . Derfor vil nabostegene i kjeden være korrelerte. Siden det er ukorrelerte data en er interessert i for å lage parameteranalysen, tar en bare vare på hver tiende eller tusende element i kjeden for senere analyse. Dette blir kalt "kjedefortynning".

Dataene til overs som vi vil analysere er da den fulle kjeden minus de fjernede dataene fra initial "burn-in" perioden, og dataene fjernet i fortynningsprosessen. Sannsynligheten for at for eksempel summen av nøytrinomassene M_ν skal være i et visst område blir nå antall kjededata i dette området dividert med totalt antall data.

En har "raske" og "trege" parametre i CosmoMC. En rask parameter kan endres uten at perturbasjonslikningene må løses på nytt. Et eksempel på en slik parameter er amplituden til styrkespekteret. Hvis en forandrer en rask parameter trenger en ikke å beregne de lineære perturbasjonslikningene på ny. De trege parametrene er parametre som har med utviklingen av perturbasjoner å gjøre, slik som M_ν og Ω_m . Forandring av de trege parametrene vil gi en totalt ny beregning av styrkespekteret i CAMB. Denne splittingen av raske og trege parametre blir brukt til å gjøre koden mer effektiv. Disse parametre blir variert separert. Dette minsker antall tidskonsumerende kjøring med CAMB.

Det er viktig å vite når kjeden har konverget i MCMC. Derfor er det effektivt å kjøre mange kjeder på en gang, og la de forskjellige kjedene kjøre til de konvergerer mot den samme fordelingen. Dette blir gjort ved å definere en parameter $R = \frac{\text{variasjonen av gjennomsnittet til kjeden}}{\text{gjennomsnittet av kjedens varians}}$ for

hver parameter ut fra den siste delen av den genererte kjeden. For hvert steg i kjeden vil den verste verdien av R bli sammenliknet med en definert øvre grense. Når den verste verdien av R er under denne grensen, vil kjeden stoppe. Jeg har satt denne øvre grensen til $R - 1 = 0.015$ i mine kjøring.

Mine kjøring ble gjort på maskinen Titan på Universitetet i Oslo med 8 prosessorer.

Kapittel 6

WMAP-data og nøytrinomassen

Den kosmiske bakgrunnstrålingen CMB gir oss en unik mulighet til å se hvordan universet var 300 000 år etter Big Bang. Fotonene fra den kosmiske bakgrunnstrålingen vekselvirket sist med elektroner ved en rødforskyvning på omtrent 1100, og har siden dette reist fritt gjennom rommet. De er derfor et kraftig hjelpemiddel for å finne ut hvordan det tidlige universet var, og temperaturfluktuasjonene i CMB er den viktigste observasjonen vi har i kosmologi idag. Målingene gjort med WMAP av den kosmiske bakgrunnstrålingen har spilt en viktig rolle i å bestemme kosmologiske parametre i kosmologiske modeller.

Jeg vil i dette kapitlet i hovedsak bygge på [30], som var den første artikkelen der man fant en god øvre nøytrinomassegrense ved bare å bruke målinger av CMB. Spesielt vil en se at når nøytrinoer har masse vil dette ha en effekt på de andre parametrene. Til slutt vil jeg sammenlikne resultatene fått fra [30] med mine egne resultater kjørt i CosmoMC, og se hvordan de forskjellige parametrene ser ut når jeg bare har med målinger fra WMAP.

6.1 Reduserte CMB-observasjoner

I figur 6.1 ser vi et eksempel på styrkespekteret til temperaturanisotropiene til bakgrunnstrålingen i et flatt Λ CDM-univers, med og uten nøytrinomasse. Vi ser tydelig at nøytrinoer med masse vil påvirke styrkespekteret. Disse vil heve styrkespekteret og forskyve det litt til venstre. For å få noe fornuftig ut fra dette styrkespekteret er det en fordel å kunne beskrive formen av det på en god måte.

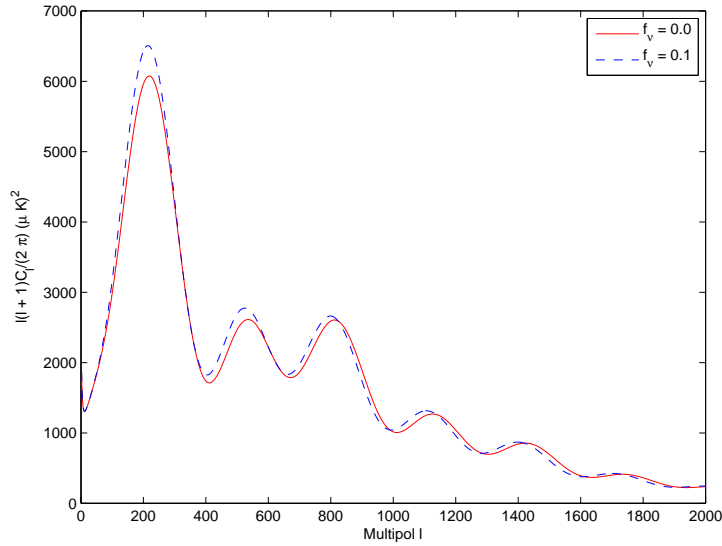
Forfatterne av [30] bygger i hovedsak på reduserte CMB-observasjoner i sin diskusjon. De følger [31] som fokuserer på fire størrelser som karakteriserer formen av CMB-styrkespekteret. Disse er:

*Amplituden av den første toppen, ved posisjon l_1 , relativt til amplituden ved $l = 10$,

$$H_1 \equiv \left(\frac{\Delta T_{l_1}}{\Delta T_{10}} \right)^2. \quad (6.1.1)$$

*Forholdet mellom den andre og første toppen,

$$H_2 \equiv \left(\frac{\Delta T_{l_2}}{\Delta T_{l_1}} \right)^2. \quad (6.1.2)$$



Figur 6.1: CMB-styrkespekteret i et flatt Λ CDM-univers med og uten massive nøytrinoer beregnet i CAMB.

*Forholdet mellom den tredje og første toppen,

$$H_3 \equiv \left(\frac{\Delta T_{l_3}}{\Delta T_{l_1}} \right)^2. \quad (6.1.3)$$

Her er $(\Delta T_l)^2 \equiv l(l+1)C_l/2\pi$ og C_l er multipolkoeffisienten av temperaturanisotropien. Det [30] gjør er å bruke numeriske simuleringer der de sammenlikner modeller med og uten nøytrinomasse med observerte reduserte CMB-data. De finner at χ^2 øker til større masse nøytrinoene har i en modell. En øvre grense på massetettheten til nøytrinoene blir funnet til

$$\omega_\nu = \Omega_\nu h^2 = \frac{M_\nu}{94.1 \text{ eV}} < 0.02. \quad (6.1.4)$$

Det er vanskelig å forbedre denne grensen noe særlig ved bruk av CMB-observasjoner alene. Verdien under brøken (94.1 eV) i (6.1.4) har en litt annen verdi enn hva jeg brukte i likning (3.4.17). Dette kommer av at [30] går ut fra at nøytrinoene koblet seg fra resten av plasmaet momentant, noe som egentlig er en tilnærming.

6.2 Analytisk studie av effekten av massive nøytrinoer

Jeg vil nå forklare effekten av massive nøytrinoer på reduserte CMB-observasjoner. En viktig epoke når en skal ta for seg denne effekten er når nøytrinoene ble ikke-relativistiske. I denne epoken vil nøytrinoene gå fra å oppføre seg som stråling til å oppføre seg som kald mørk materie, CDM. Selv om dette ikke skjer på et øyeblikk, kan en anta at nøytrinoene blir ikke-relativistiske når deres gjennomsnittelige bevegelsesmengde p_ν blir lik nøytrinomassen m_ν ,

som tilsvarer $T_{\nu,nr} = \frac{m_\nu}{3}$. Dette gir en rødforskyvning på

$$1 + z_{nr} = \frac{T_{\nu,nr}}{T_{\nu,0}} = 1.99 \times 10^3 (m_\nu / eV) = 6.24 \times 10^4 \omega_\nu, \quad (6.2.1)$$

hvor jeg går ut fra at nøytrinoene består av 3 typer med lik masse $M_\nu = 3m_\nu$, slik at $\omega_\nu = \frac{M_\nu}{94.1 eV} = \frac{3m_\nu}{94.1 eV}$. Ut fra dette kan det vises at nøytrinoene ble ikke-relativistiske før rekombinasjonsfasen $z_{nr} > 1088$ hvis

$$\omega_\nu \gtrsim 0.017. \quad (6.2.2)$$

Hvis dette ikke er tilfelle vil nøytrinoene fortsette å være ikke-relativistiske i epoker etter rekombinasjonen. I grafene i [30] fra de numeriske simuleringene kan en se at denne verdien tilsvarer et vendepunkt for de fire reduserte CMB-observasjonene. Dette kommer av at hvis nøytrinoene ble ikke-relativistiske etter rekombinasjon, vil CMB allerede være produsert ved tider når nøytrinoene ble ikke-relativistiske og fikk masse. Derfor mener [30] at for å få en øvre grense bedre enn $\omega_\nu = 0.017$ trenger en andre type observasjoner enn CMB.

Jeg definerer energitettheten som $\omega \equiv \Omega h^2 = \rho h^2 / \rho_{cr,0}$, hvor $\rho_{cr,0} = 3M_{pl}H_0^2$ er den kritiske tettheten i dag. Energitettheten for materie og fotoner blir da

$$\rho_m(a)h^2 / \rho_{cr,0} = \omega_{m,0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-3}, \quad (6.2.3)$$

$$\rho_\gamma(a)h^2 / \rho_{cr,0} = \omega_{\gamma,0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-4}, \quad (6.2.4)$$

hvor energitettheten for fotoner idag er gitt som $\omega_{\gamma,0} = 2.48 \times 10^{-5}$ for $T_{\gamma,0} = 2.725$ K. Fra [8] og [30] får jeg at energitettheten for nøytrinoer er gitt som

$$\rho_\nu(a)h^2 / \rho_{cr,0} = \frac{45}{\pi^4} \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} \omega_{\gamma,0} \left(\frac{a}{a_0} \right)^{-4} \times \int_0^\infty \sqrt{x^2 + y^2} x^2 (e^x + 1)^{-1} dx, \quad (6.2.5)$$

hvor $y = m_\nu(11/4)^{1/3}(a/a_0)T_{\gamma,0}^{-1}$. Jeg går ut fra at de tre nøytrinotypene har degenerert masse. Energitettheten til vakuum er gitt som

$$\rho_\Lambda(a)h^2 / \rho_{cr,0} = \omega_{\Lambda,0} = h^2 - \omega_{m,0} - \omega_{\nu,0}, \quad (6.2.6)$$

for et flatt univers. Den totale energitettheten blir da $\rho_{tot} = \rho_m + \rho_\gamma + \rho_\nu + \rho_\Lambda$. Med ρ_{tot} vil den kosmiske ekspansjonsraten $H = \dot{a}/a$ være gitt som $H^2 = \rho_{tot}/3M_{pl}^2$, som blir brukt til å finne komform tid η ,

$$\eta(a) = \int \frac{dt}{a} = \int_0^a \frac{da'}{a'^2 H}. \quad (6.2.7)$$

Posisjonene av topp nummer m definert som l_m er i [30] bestemt av den akustiske toppen l_A og faseskiftet ϕ_m ,

$$l_m = l_A(m - \phi_m), \quad (6.2.8)$$

hvor den akustiske skalaen er definert som

$$l_A = \pi \frac{r_\theta(\eta_{rec})}{r_s(\eta_{rec})}. \quad (6.2.9)$$

Her er $r_s(\eta_{rec})$ lydhorisonten ved rekombinasjon og $r_\theta(\eta_{rec})$ er angulær diameteravstand til siste spredningsperiode. Det betyr at $r_\theta(\eta_{rec}) = \eta_0 - \eta_{rec}$ i et flatt univers. Lydhorisonten er gitt som

$$r_s(a) \equiv \int_0^{\eta(a)} c_s d\eta = \int_0^a c_s(a') \frac{da'}{a'^2 H'}, \quad (6.2.10)$$

hvor lyd hastigheten er $c_s^2 = \frac{1}{3(1+R)}$ med $R = 3\rho_b/4\rho_\gamma = 3a\omega_{b,0}/4\omega_{\gamma,0}$. Nøytrinoene har ikke noen effekt på lyd hastigheten siden de bare vekselvirker svakt, men de forandrer lydhorisonten gjennom (6.2.10). Hovedeffekten er at store verdier av ω_ν vil fremskyve tidspunktet for likevekt mellom materie og stråling, som vil redusere avstanden til lydhorisonten ved likevekt.

Fasefaktoren ϕ_m i (6.2.8) stammer fra den tidlige Sachs-Wolfe-effekten som kommer av at fotonene rødforskyves når de beveger seg ut fra brønner av gravitasjonspotensial. Disse brønnene er tetthetsperturbasjoner, og hvor mye de vokser kommer ann på hvor mye stråling som demper dem på grunn av "free-streaming". Masseløse nøytrinoer oppfører seg som strålingsdelen av energitettheten mens ikke-relativistiske nøytrinoer oppfører seg som CDM. Dette betyr at ϕ_m avhenger av om nøytrinoene har masse eller ikke og er derfor en god indikator på nøytrinomassen.

For å finne fasefaktoren bruker jeg formelen gitt i [31] i stedet for å løse alle de koblede Boltzmannlikningene,

$$\phi_1 \approx 0.267 \left(\frac{r_{rec}}{0.3} \right)^{0.1}. \quad (6.2.11)$$

Her er r_{rec} forholdet mellom energien til stråling og materie $r = \rho_r/\rho_m$ ved rekombinasjon. Denne formelen er gitt for masseløse nøytrinoer, men den fungerer også for massive nøytrinoer når r_{rec} blir modifisert. Dette kommer av at effekten av massive nøytrinoer på den integrerte Sachs-Wolfe-effekten i hovedsak stammer fra forandring av r_{rec} . En ser av (6.2.11) at en stor verdi av r_{rec} leder til en større faseforskyvning. Massive nøytrinoer med $\omega_\nu > 0.017$ vil dempe denne effekten.

Jeg må i første omgang splitte opp nøytrinoene i to grupper for å finne r_{rec} når jeg har med massive nøytrinoer. Den ene gruppen som har $p_\nu > m_\nu$, behandler jeg som stråling, og den andre gruppen med $p_\nu < m_\nu$ behandler jeg som materie. Derfor må jeg splitte ρ_ν opp i en strålingskomponent $\rho_{\nu,r}$ og en materiekomponent $\rho_{\nu,m}$ som følger:

$$\rho_{\nu,r}(a)h^2/\rho_{cr,0} = \frac{45}{\pi^4} \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} \omega_{\gamma,0} \frac{a}{a_0}^{-4} \times \int_y^\infty \sqrt{x^2 + y^2} x^2 (e^x + 1)^{-1} dx, \quad (6.2.12)$$

$$\rho_{\nu,m}(a)h^2/\rho_{cr,0} = \frac{45}{\pi^4} \left(\frac{4}{11} \right)^{4/3} \omega_{\gamma,0} \frac{a}{a_0}^{-4} \times \int_0^y \sqrt{x^2 + y^2} x^2 (e^x + 1)^{-1} dx. \quad (6.2.13)$$

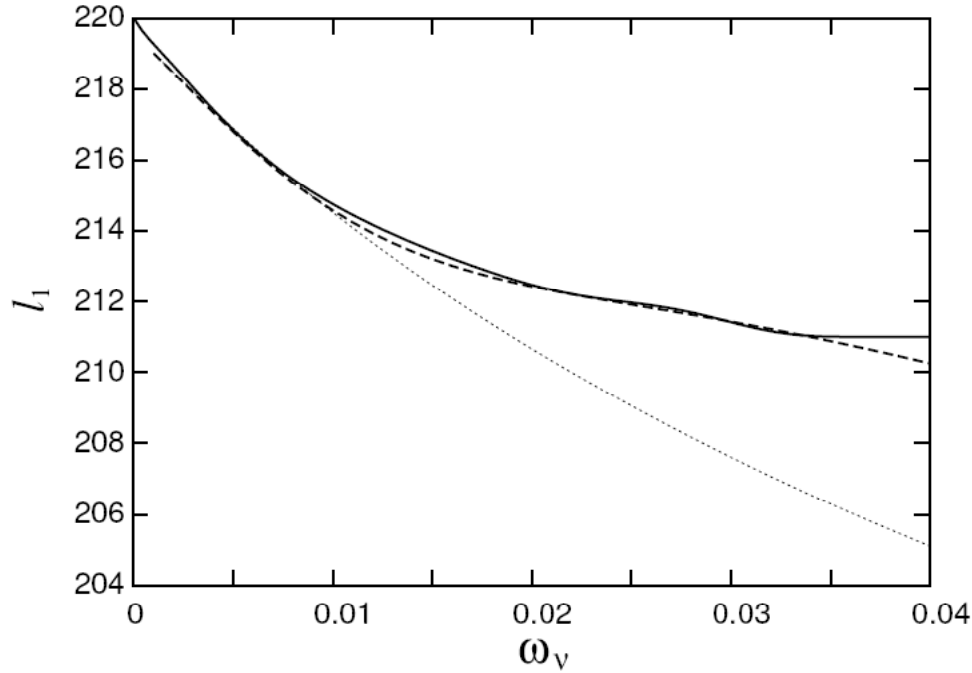
Forholdet mellom stråling og materieenergi blir beregnet til

$$\xi = (\rho_\gamma + \rho_{\nu,r})/(\rho_m + \rho_{\nu,m}), \quad (6.2.14)$$

som blir brukt til å beregne ϕ_1 i (6.2.11).

Fra figur 6.2 som er tatt fra [30] ser en hvordan den tidlige Sachs-Wolfe-effekten blir gjeldene for $\omega_\nu > 0.017$. Med små nøytrinomasser $\omega_\nu < 0.017$ vil denne effekten ha mindre og si siden nøytrinoene da blir ikke-relativistiske etter rekombinasjonsfasen.

"Free-streaming" av massive nøytrinoer vil altså dempe størrelsene på gravitasjonsbrønnene og minske perturbasjoner på små skala. Dette vil forstørre den baryonske oscillasjonen, som gir



Figur 6.2: Stiplet linje indikerer når effekten av massive nøytrinoer på den tidlige Sachs-Wolfe effekten blir ignorert.

større fluktuasjoner på skalaer der "free-streaming" av nøytrinoer er gjeldende. Denne skalaen er gitt som

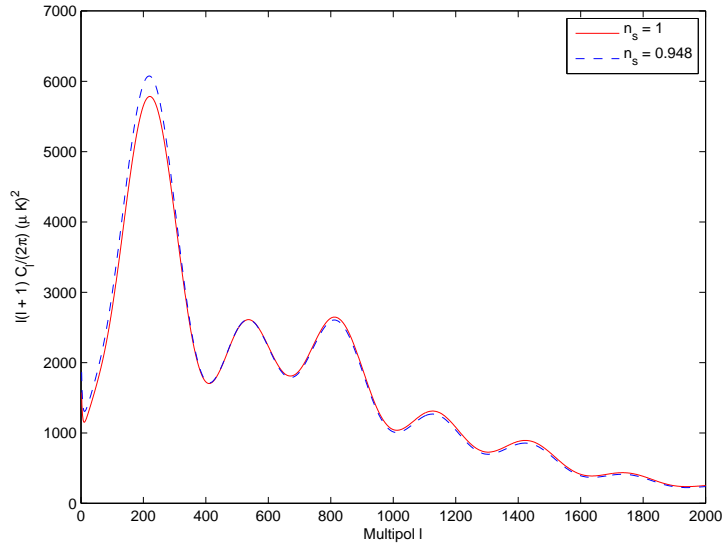
$$l_{nr} \simeq \frac{2\pi r_\theta(\eta_{rec})}{\eta_{nr}}, \quad (6.2.15)$$

hvor η_{nr} er "free-streaming" skalaen. For den magiske grensen på $\omega_\nu \approx 0.017$ vil denne skalaen tilsvare $l_{nr} \approx 300$. Dette vil si at for denne nøytrinomassen vil CMB-styrkespekteret med $l > 300$ være påvirket av "free-streaming" av nøytrinoer.

6.3 Spektralindeksens påvirkning på WMAP

Som vi har sett vil massive nøytrinoer påvirke CMB-styrkespekteret, sammen med kald mørk materie og baryoner. Men det finnes en parameter som stammer fra inflasjonsfasen som også er viktig, nemlig spektralindeksen n_s som jeg gikk igjennom i kapittel 4.

Potensialet som drev inflasjonsfasen var ikke konstant, hvis ikke ville inflasjonsfasen aldri stoppet. Dette avviket fra et konstant potensial, som også vil si avviket fra en eksponensiell utvidelse av universet er gitt av likning (4.3.6). I et konstant potensial i inflasjonsfasen ville vi hatt $n_s = 1$. Slow-roll parametrene forandrer potensialet sakte i inflasjonsfasen slik at n_s vil avvike fra 1. Denne forandringen vil påvirke styrkespekteret til metrikken. Dette vil igjenn sette sine spor i bakgrunnstrålingen. På figur 6.3 ser en påvirkningen på CMB-styrkespekteret for to n_s verdier. Vi ser at et avvik fra eksponensiell utvikling i inflasjonsfasen gitt av likning (4.3.6) vil påvirke CMB-styrkespekteret på en liknende måte som nøytrinoer med masse vil gjøre, se figur 6.1. Det vil si at også n_s verdien påvirker Sachs-Wolfe-effekten og det kan derfor



Figur 6.3: Effekten av n_s på CMB-styrkespekteret funnet i CAMB.

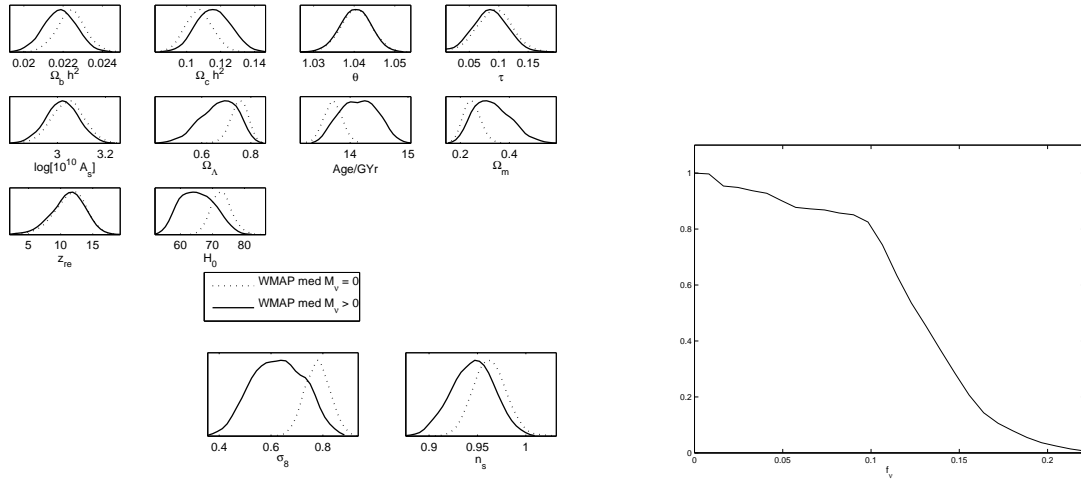
være vanskelig å skille mellom effekten av n_s og nøytrinomassen. Dette gjør at beregninger av nøytrinomassen med WMAP-målingene alene har sine begrensninger.

6.4 Numeriske resultater fra WMAP

Vi har nå sett at CMB-målinger kan gi gode føringer på hvordan energitettheten til de forskjellige parametrene kan se ut. Hvis nøytrinoene har masse påvirker disse de andre parametrene som vi igjenn vil se i CMB-styrkespekteret. WMAP-målingene er i dag de beste målingene av CMB-temperaturanisotropi. Ved å kjøre CosmoMC med WMAP-målingene kan jeg få en indikasjon på hvordan sannsynlighetsfordelingene for de forskjellige parametrene ser ut. Spesielt interessant er det å se hvilken øvre grense jeg får på nøytrinomassen. Se figur 6.4.

Jeg vil bruke en kosmologisk modell med $\{\omega_b, \omega_c, \theta, \tau, f_\nu, n_s, A_s\}$ som frie parametre. $\omega_b = \Omega_b h^2$ og $\omega_c = \Omega_c h^2$ står for tettheten av baryoner og kald mørk materie. Siden jeg skal holde meg til et flatt Λ CDM-univers kan jeg finne Ω_Λ ut fra likning (3.3.14). θ er forholdet mellom lyd-horisonten og angulær diameteravstand til siste spredningsflate. Denne er gitt som forholdet mellom størrelsen til et objekt og størrelsen på vinkelen objektet utgjør på himmelen sett fra jorden. τ er optisk dybde ved den siste spredningsoverflaten, det vil si rett før fotonene løsrev seg fra foton-baryon-plasmaet. f_ν er definert litt anderledes i CosmoMC enn hva den er definert som i kapittel 4. Den er definert som forholdet mellom massemengden til nøytrinoer og mørk materie, $f_\nu = \frac{\Omega_\nu}{\Omega_{dm}}$, hvor Ω_{dm} er massemengden av all materie utenom baryoner. n_s er den skalare spektralindeksen, og er blant annet definert som i likning (4.3.6) og (4.3.7). A_s gir amplituden på de tidligste skalarfluktuasjonene. Jeg antar at den mørke energien er bestemt av en kosmologisk konstant $w = -1$.

Kjøringen med WMAP-dataene gav en øvre grense på $f_\nu < 0.148$ i 95% konfidensintervallet som tilsvarer en sum av nøytrinomassene på $M_\nu < 2.0 \text{ eV}$. Dette er den samme grensen en



Figur 6.4: Figurene viser beregninger fått fra kjøringene med WMAP-datasettet. På figuren til høyre ser en hvilken øvre grense nøytrinomassen får. På figuren til venstre ser en fordelingen til de forskjellige parametrene med kjøringene med og uten nøytrinoer med masse. De uthevede parametrene er de mest aktuelle for min analyse.

fikk i [30] som hadde $\omega_\nu < 0.021$ som tilsvarer $M_\nu < 2.0 \text{ eV}$.

Jeg kjørte også en kjøring der nøytrinoene ikke hadde masse. Resultatet av disse kjøringene med og uten nøytrinomasse ser en i figur 6.4. Usikkerheten på de forskjellige parametrene blir større når nøytrinoene har masse. Grunnen er at vi nå får med et ekstra element, nemlig nøytrinomassen, som påvirker bakgrunnstrålingen. Men fordelingen til de forskjellige parametrene forflytter seg:

* Ω_m blir større siden $\Omega_m = \Omega_c + \Omega_b + \Omega_\nu$.

* Ω_Λ vil bli mindre ettersom $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$.

* H_0 blir mindre siden Ω_Λ påvirker denne parameteren.

*Alderen til universet går opp ettersom den er avhengig av H_0 .

Jeg har summert de viktigste resultatene i tabell 6.1

	Ω_m	Ω_Λ	σ_8	n_s
WMAP $f_\nu = 0$	$0.247^{+0.035}_{-0.034}$	$0.753^{+0.034}_{-0.035}$	$0.779^{+0.049}_{-0.049}$	$0.963^{+0.016}_{-0.017}$
WMAP $f_\nu < 0.148$	$0.332^{+0.079}_{-0.077}$	$0.668^{+0.077}_{-0.079}$	$0.628^{+0.107}_{-0.104}$	$0.945^{+0.022}_{-0.022}$

Tabell 6.1: Resultat for utvalgte parametre. De gitte verdiene er gjennomsnittlig verdier for sannsynlighetsfordelingen. Feilen er gitt ved 68 % konfidensintervall. Grensen til nøytrinomassen er gitt ved 95 % konfidensintervall.

Det er interessant å se på σ_8 , som er rms-materiefluktuasjonen innenfor ei kule på $8h^{-1}Mpc$ funnet ved lineær teori [32]. Den blir tydelig mindre når nøytrinoene har masse med en større usikkerhet. Dette kommer av at den første toppen l_1 vil befinne seg på høyere l verdier til mindre masse nøytrinoene har, og dermed mer perturbasjoner på mindre skala som gjør at σ_8 får en høyere verdi til mindre masse nøytrinoene har. For å si det på en annen måte. Jo større masse nøytrinoene har, jo mer masse vil flykte fra perturbasjoner gjennom "free streaming" innenfor "free streaming" skalaen, og σ_8 vil bli mindre.

n_s verdien blir litt mindre når nøytrinoer har masse, men usikkerheten blir større. Fra likning (4.3.6) ser jeg at styrkespekteret til de første fluktuasjonene på store skalaer blir større når n_s får en mindre verdi. Dette vil spre seg til bakgrunnstrålingen som vi ser på figur 6.3. Når nøytrinoer har masse vil dette også føre til større fluktuasjoner på store skalaer i bakgrunnstrålingen. Det gir en samlet effekt av nøytrinoene og n_s på bakgrunnstrålingen, som gjør at vi får større usikkerhet i disse beregningene ut fra WMAP-målingene. For å få bedre begrensninger på de forskjellige parametrene og på nøytrinomassen er det lurt å bruke målinger som er mer avhengig av nøytrinomassen og uavhengig av n_s . Dette er massefunksjonen for galaksehooper et eksempel på, og den behandles i neste kapittel.

Kapittel 7

Massefunksjonen for galaksehoper

Det har lenge vært kjent at fordelingen av massive galaksehoper er følsom for amplituden til tetthetsfluktuasjonene av storskalastrukturen LSS i universet. Massefunksjonen for galaksehoper kan bli brukt til å finne interessante begrensninger på parametre som er relatert til strukturekst, spesielt normaliseringen av tetthetsfluktuasjonene og gjennomsnittelig massetetthet av universet Ω_m . Dessuten kan massefunksjonen brukes til en interessant målestokk for mørk energi. Hvis materie-energitettheten i universet er dominert av en mørk energikomponent, vil strukturekst bli hindret når denne komponenten blir dynamisk viktig.

Jeg vil først i dette kapittelet si litt om galaksehoper og hvorfor disse er viktige når en skal finne ut hvordan massen er fordelt i universet, før jeg går gjennom [1] som gjorde de første målingene av massefunksjonen basert direkte på masser av galaksehoper funnet fra observasjoner av svak gravitasjonslensing. Deretter vil jeg se på hvordan dette gir en god massefunksjon og hvilke resultater dette vil medføre på aktuelle parametre. Til slutt vil jeg se på hvordan en bedre bestemmelse av massefunksjonen kan gi sterkere føringer på spesielt nøytrinomassen og inflasjon.

7.1 Galaksehoper

Jeg vil i hovedsak bygge dette avsnittet på [8], som gir en god beskrivelse på hvordan en kan bruke galaksehoper til å finne en god massefunksjon. Å forutse hvordan galaksetettheten i universet er, ut fra hva vi har lært av fordelingen av materie i universet, involverer kompliserte forhold som vi ikke har kjennskap til. Men ved hjelp av numeriske simuleringer har flere grupper utviklet semianalytiske teknikker som har vist seg å være gode til å forutse egenskaper og populasjonen av forskjellige galaksetyper. Press-Schechter-formalismen, som det meste av dette avsnittet er bygget på, danner mye av basisen for dette arbeidet.

Kanskje den mest fundamentale vanskeligheten som en kan komme bort i om en vil prøve å forutsi tettheten av galakser, er at lengdeskalaen forbundet med galakser svarer til ikke-lineære tetthetsperturbasjoner i dag. Skalaer mindre enn $10hMpc^{-1}$ er ikke-lineære. Da er spørsmålet hvilke skalaer i det uperturberte universet som inneholder massen av en typisk galakse $M = 10^{12}M_\odot$. Tettheten i en region med radius R er

$$\rho_m = \frac{M}{4\pi R^3/3}. \quad (7.1.1)$$

Siden $\rho_m = \Omega_m \rho_{cr}$ kan en ut fra dette få radiusen som galaksen opptar

$$R = 0.951 h^{-1} \text{Mpc} \left(\frac{Mh}{10^{12} \Omega_m M_\odot} \right). \quad (7.1.2)$$

Dette vil si at en galakse kommer fra materie med en radius på ca 1Mpc, som vil tilsi fluktuasjoner på $k \sim 1h \text{Mpc}^{-1}$ som er langt inne i det ikke-lineære regime. For å finne materietettheten er det lurt å finne tettheten av galakser. Men nå er spørsmålet om det finnes skalaer i nærheten av det lineære regimet hvor en kan få forutsigelser en kan stole på når det gjelder hvordan galaksene er fordelt. Ved å skrive litt om på (7.1.2) får vi massen innenfor en kule med radius R,

$$M = 1.16 \times 10^{15} \Omega_m h^{-1} M_\odot \left(\frac{R}{10 h^{-1} \text{Mpc}} \right)^3. \quad (7.1.3)$$

Dette vil si at galaksehoper med masse opp til $10^{15} M_\odot$ kommer fra perturbasjoner på rett skala.

Ut fra Press-Schechter teori [23] kan en forutsi hvordan galaksehoper er fordelt. De var interessert i de sjeldne regionene med stor overtetthet. Disse kollapser og trekker til seg så mye materie at lokal gravitasjon blir viktigere enn Hubble-strømmen, som er utvidelsen av universet. Partikler i disse regionene stopper å bevege seg fra hverandre. De blir fanget i det lokale gravitasjonsfeltet.

Press-Schechter teorien forutser hvor mye av volumet som har kollapset

$$f_{coll}(M(R), z) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma(R, z)} \int_{\delta_c}^{\infty} d\delta e^{-\delta^2/2\sigma^2(R, z)}, \quad (7.1.4)$$

hvor R er radiusen der tetthetsfeltet har blitt jevnet ut. Denne radiusen blir brukt til å regne ut $\sigma(R, z)$, som er overtettheten av det utjevnede tetthetsfeltet på en rødforskyvning z . Inhomogenitet på store skalaer er vanligvis mindre enn de på små skalaer, slik at små skalaer kollapser først. Ettersom tiden går vil overtette regioner vokse og noen store inhomogene skalaer vil også kollapse. Høyre siden av (7.1.4) teller alle delene av den Gausiske fordelingen hvor overtettheten er større enn den kritiske tettheten δ_c . Press-Schechter formalismen bruker en del antagelser når den utleder denne formelen. Først går den ut fra at fordelingen av inhomogeniteter er Gausisk. Dessuten er normaliseringsfaktoren 2 noe en normalt ikke ville tatt med. Til slutt går en ut fra at rms σ i formelen er lineær, hvor en ignorerer ikke-lineære effekter. På tross av disse antagelsene viser numeriske simuleringer at formalismen fungerer veldig bra.

For å få de kollapsede delene i en form som er mer håndterlige til observasjoner er det lurt å først differensiere f_{coll} med hensyn på M , og så multiplisere med et lite intervall dM . Dette gir andelen av volumet som er kollapset til objekter med masse mellom M og $M + dM$. For å få tettheten av antall kollapsede objekter med masse mellom M og $M + dM$, må en multiplisere dette med gjennomsnittelig tetthet av antallet slike objekter ρ_m/M

$$dn(M, z) = -\frac{\rho_m}{M} \frac{df_{coll}(M(R), z)}{dM} dM. \quad (7.1.5)$$

Minus tegnet kommer av at f_{coll} er en avtagende funksjon av massen M. Ved å derivere denne funksjonen står en igjen med

$$\frac{dn(M, z)}{dM} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\rho_m \delta_c}{3M^2 \sigma} e^{-\delta_c^2/2\sigma^2} \left[-\frac{R}{\sigma} \frac{d\sigma}{dR} \right]. \quad (7.1.6)$$

Den dominerende faktoren i (7.1.6) er eksponensialet for store masser. Hvis σ ved en gitt skala er liten, vil tettheten av antalle kollapsede objekter på denne skalaen bli eksponensielt undertrykket.

Å måle mengden av galaksehoper, og derfor teste teorier med (7.1.6), er et subtilt felt. En kommer bort i en del vanskeligheter som for eksempel å identifisere galaksehoper. Sofistikerte algoritmer er blitt laget for å finne galaksehoper i galakseobservasjoner. En annen vanskelighet er å bestemme massen til galaksehopen. Det finnes mange metoder for å bestemme massen til disse:

Røntgen-temperatur. Varm ionisert gass fra galakshopen, hvor frekvensen er bestemt av temperaturen av gassen. Denne temperaturen kan bli relatert til massen av galakshopen ved å bruke visse antagelser. For eksempel at galaksehopen er i hydrostatisk likevekt og om hvordan baryonsk materie klumper seg relativt til den mørke materien.

Sunyaev-Zeldovich-forvrengning. Fotoner fra CMB som går gjennom galaksehoper, blir sprett av den varme gassen. Dette forstyrrer CMB-spekteret som en funksjon av frekvens. Formen av denne forstyrrelsen er bestemt. Amplituden er et annet mål for temperaturen av gassen, som igjen kan bli oversatt til et mål av massen ved å bruke visse antakelser. Her antar en også hvordan baryonisk materie klumper seg relativt til mørk materie. En antar også at vinkelskalaen og rødforskyvningsrelasjonen ikke forandrer seg ved rødforskyvning mellom 0.2 og 0.3.

Svak Linsing. Bilder av galakser i bakgrunnen blir forstyrret av galaksehoper i forgrunnen. Til større masse disse galaksehopen har, jo større forstyrrelse. Svak linsing er derfor et fabelaktig redskap til å måle massen av galaksehoper uten å bruke temperaturen, noe vi skal se på i neste avsnitt.

7.2 Å finne massefunksjonen for galaksehoper fra svak gravitasjonslinsing

Dette avsnittet bygger i hovedsak på [1]. Som nevnt i innledningen gjorde [1] de første målingene av massefunksjonen for galaksehoper basert direkte på galakshopenemasser funnet fra observasjoner med svak gravitasjonslinsing. Mange studier bruker temperaturfluktuasjoner (XTF) eller luminositetsfunksjonen (XLF) av galaksehopenes røntgenstrålingen som en tilnærming til massefunksjonen. De tar utgangspunkt i at hopene er i hydrostatisk likevekt, som betyr at temperaturen T_X og luminositeten L_X av røntgenstrålingen lett kan bli relatert til massen av galaksehopen. Men dette er ikke alltid sant ettersom noen galaksehoper har komplekse temperatur-strukturer.

Disse problemene kan bli omgått hvis en tar uavhengige verdier av massen til galaksehoper direkte gjennom målinger av gravitasjonslinsing, som ikke støtter seg på hvordan det dynamiske stadiet av galaksehopen er. Fordelen med dette er at den ikke relaterer observasjoner av de baryoniske hopene direkte til galakshopenemassen. Dette krever linsede masser av et stort antall galaksehoper som er nøye utvalgt. Galakshopenmålinger som effektivt skiller ut de mest massive og sjeldne hopene i et stort volum, er mest passende å bruke siden disse er mest sensitive til de kosmologiske parametrene.

For å konvertere målinger av et sett galaksehoper med gravitasjonslensing til en observert massefunksjon som kan bli sammenliknet med teori og simuleringer, må en gjennom en del steg. Dette er beskrevet i detalj i [1]. Her tar en utgangspunkt i et romlig flatt univers med $\Omega_m + \Omega_\Lambda = 1$. De fleste verdiene er funnet ut fra Λ CDM-modellen hvor $(\Omega_m, \Omega_\Lambda) = (0.3, 0.7)$. Først blir totalt volum til målingsområdet beregnet, og estimerer av galaksehopermasser ved hjelp av lensing inne i et sfærisk volum blir funnet. Effekten av ufullstendigheten av målingene må bli regnet med. Disse kommer fra ufullstendighet i den original galaksehoperkatalogen og av masseavhengigheten laget av observert spredning rundt $M_{180c} - L_X$ forholdet, sammen med usikkerheten i lave verdier av L_X . Her er M_{180c} massen innenfor en galaksehoperadius r_{180c} , som er radiusen hvor gjennomsnittelig tetthet er 180 ganger større enn den kritiske tettheten $\rho_{cr}(z)$. Jeg vil nå gå gjennom hovedtrekkene i [1].

7.2.1 Volum til målingsområdet

Området målingene i [1] blir tatt består av den nordlige himmelhalvkule $\delta > 0^\circ$, minus en sone med den galaktiske breddegraden $|b| < 20^\circ$. Målingene som blir gjort er dessuten bundet i rødfoskyvning mellom $0.15 \leq z \leq 0.303$. Dette representerer et volum på $8 \times 10^8 (h^{-1} Mpc)^3$. Figur 7.1 viser hvilket område som blir observert.

7.2.2 Beregne masser til Galaksehoper

De mest massive galaksehoperne vi er interessert i er selve linsen i målingene. For å finne massen til disse trenger vi et fjernt bakgrunnsobjekt, en galakse, som blir forvrengt av denne linsen. I [8] viser en hvordan denne forvrengingen kan bli beskrevet. Et objekt har en vinkel med koordinatene θ_S^i i et gitt to dimensjonalt koordinatsystem som ligger tangensielt på synslinjen til en observatør. Lyset fra dette objektet blir bøyd hvis det kommer i nærheten av anisotropier på vei mot observatøren. Observeratøren vil observere dette objektet med en ny vinkel med koordinater θ^i . Forandringen av denne vinkelen blir beskrevet av,

$$A_{ij} \equiv \frac{\partial \theta_S^i}{\partial \theta^j} \equiv \begin{pmatrix} 1 - \kappa - \gamma_1 & -\gamma_2 \\ -\gamma_2 & 1 - \kappa + \gamma_1 \end{pmatrix}. \quad (7.2.1)$$

Parameteren κ blir kalt konvergens, og beskriver hvordan et bilde blir forstørret. Selv om forstørrelsen er viktig i andre sammenhenger, er den ikke viktig for forvrengningen studert i svak gravitasjonslensing. I stedet blir denne forvrengningen beskrevet av de to komponentene av "shear" effekten. Disse blir ut fra likning (7.2.1) definert som

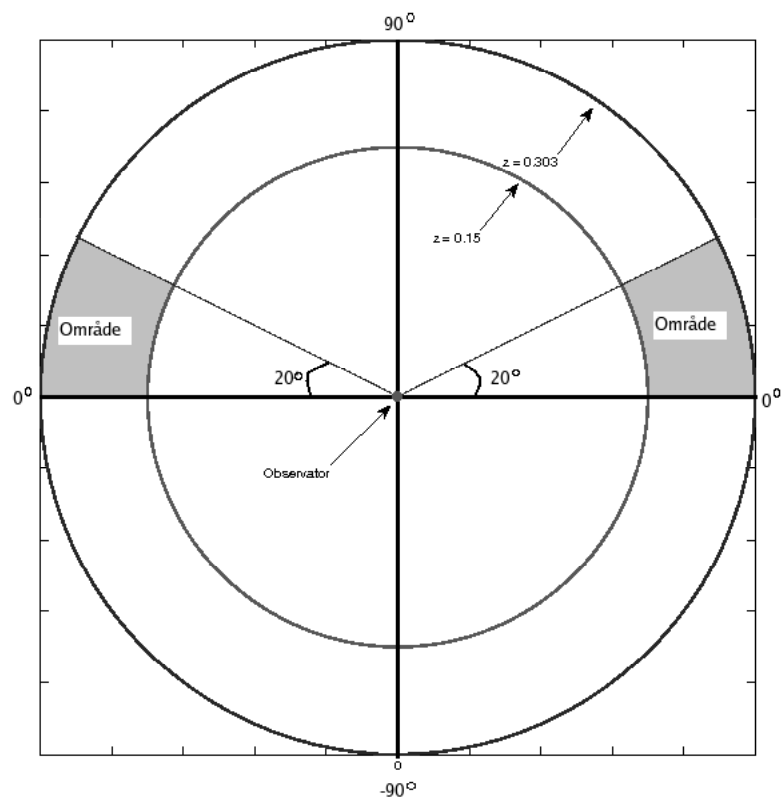
$$\gamma_1 = -\frac{A_{11} - A_{22}}{2}, \quad (7.2.2)$$

$$\gamma_2 = -A_{12}.$$

For å få en bedre forståelse av hva konvergens og "shear" er for noe kan jeg skrive likning (7.2.1) som

$$A \equiv (1 - \kappa) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \gamma \begin{pmatrix} \cos 2\phi & \sin 2\phi \\ \sin 2\phi & -\cos 2\phi \end{pmatrix}, \quad (7.2.3)$$

siden det finnes en koordinatrotasjon med en vinkel ϕ . Dette blir beskrevet mer i detalj i [25]. En ser av matrisen at forvrengningen av konvergens κ er isotrop. Det vil si at bildet blir



Figur 7.1: Figuren viser hvor mye av himmelen som blir observert i 2 dimensjoner. Hvis en integrere dette 360 grader rundt observatøren ut av arket, får en volumet som blir observert. Dette volumet blir indikert av det grå området.

reskalert med en konstant faktor i alle retninger. På en annen side vil "shear" effekten, som blir beskrevet av γ , strekke den indre formen av bildet langs en retning. Derfor vil for eksempel en sirkulær kilde bli sett som en ellipse når κ og γ er ulik null. Denne effekten vil jeg fra nå av kalle for "kosmisk shear", siden det er anisotropiene i universet som gjør at vi får disse forvrengningene i mitt tilfelle.

For å få målinger av "kosmisk shear" en kan stole på, er det nødvendig å korrelere de målte formene til galaksene fra forskjellige kilder av systematiske feil som påvirker dem. I [1] blir "shear" estimatoren til Kaiser [24] brukt til dette. Forskjellen mellom sann og observert "shear" i målingene blir korrelert ved hjelp av et andregradspolynom. De fleste galaksehopenes har en masse som ligger mellom $+/- 15\%$ av massen beregnet fra ukorrelerte verdier av "kosmisk shear". Videre er gjennomsnittelig forandring i galaksehopenes masse $< 2\%$. Det vil si at det er veldig lite systematiske forandringer i massene. Derfor blir disse korrelasjonene ikke tatt med i [1].

Målinger av ellipsiteten blir i [1] brukt til å beskrive "kosmisk shear". For å komme frem til denne definerer vi først halvaksene til en ellipse som

$$\begin{aligned} a &= \frac{r}{1 - \kappa + \gamma}, \\ b &= \frac{r}{1 - \kappa - \gamma}, \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

hvor r er radiusen til en sirkulær kilde. Da blir ellipsiteten gitt som

$$g = \frac{a - b}{a + b} = \frac{\gamma}{1 - \kappa}. \quad (7.2.5)$$

Dette vil si at ellipsiteten måler "shear" effekten direkte. I [1] blir dette kalt for den reduserte tangensielle "shear" effekten, siden en observerer effekten tangensielt på himmelen.

Gjennomsnittelig verdi av g blir målt med et sett målinger med gjennomsnittelig radius r fra senteret til galaksehopen. En NFW-type profil [27] blir videre tilpasset shear profilen g for hver galaksehopen. I denne modellen blir tettheten gitt som

$$\rho(r) \propto [(r/r_s)(1 + r/r_s)^2]^{-1}, \quad (7.2.6)$$

hvor r_s er skalarradiusen. Skalarradiusen er verdien av konstanten som trengs for at den observerte luminositetsfordelingen skal passe en eksponensiell luminositetskurve $I(R) = I_0 e^{(-R/r_s)}$. En konsentrasjonsparameter $c_{vir} = r_{vir}/r_s$ blir også brukt. Her er r_{vir} virial radiusen til hopen og er gitt som $r_{vir} = r_{180c}$. Simuleringer av galaksehoper i Λ CDM-univers forutsier at c_{vir} er avhengig av galaksehopenes masse og rødforkyvningen. Galaksehopenes medianverdi til massen fra målingene til [1] er $M_{180c} \simeq 8 \times 10^{14} M_\odot$, hvor M_\odot er en solmasse. Fra dette blir det funnet en median halokonsentrasjon på $c_{vir} = r_{vir}/r_s = 1.14 r_{180c}/r_s = 5.8/(1+z)$ i Λ CDM-modellen. Siden masseområdet for galaksehopenes som blir studert er små, vil masseavhengigheten til $c_{vir} \simeq M^{-0.10}$ være liten, slik at c_{vir} får en verdi ved en gitt rødforskyvning.

Når en observerer på himmelen bruker en buesekunder som har symbolet ". Et buesekund tilsvarer $1/3600$ av en grad. NFW-modellen gir beregninger av r_{180c} og M_{180c} . "Shear" målingene brukt for denne tilpassingen blir gjort ved $50'' < r < 180''$ for hoper som er observert med 2048² CCD kamera, og $150'' < r < 550''$ for hoper observert med UH8K mosaic CCD kamera. Galaksehoper brukt i [1] har typiske verdier for r_{180} gitt i området $450'' < r_{180c} < 750''$. Ekstrapolasjon blir derfor ofte brukt for å finne massen innen r_{180c} .

Som vi har sett blir c_{vir} verdien satt for en gitt rødforskyvning, og derfor vil en indre spredning i denne parameteren gi en ekstra usikkerhet i galaksehopenmassen. Nivået av disse spredningene er avhengig av r_{fit} og r_{180c} , hvor r_{fit} er maksimal radius av "shear" målingene. Hoper observert med 2048² CCD kamera ($r_{fit}/r_{180c} \simeq 0.3$) gir en 18 prosent usikkerhet på massen. Hoper observert med UK8K kamera ($r_{fit}/r_{180c} \simeq 1.0$) gir en 10 prosent usikkerhet på massen.

De fotometriske dataene klarer ikke alltid å skille helt mellom galaksehoper og linsede bakgrunnsgalakser. De fjerne galaksene som blir brukt til å måle "kosmiske shear" vil derfor bli forurenset av hoper som forstyrrer linsingsignalet ved en størrelse gitt av deres lokale himmeltetthet. For å korrelere dette, blir en radiell avhengig korrelasjonsfaktor påført målingene av "kosmisk shear" i [1]. Dette fører til en korrelasjon på massen til galaksehopenene på 20-30 prosent. Variasjonene til de fjerne dverg galaksene, som blir brukt til å måle "kosmisk shear", vil også lede til en spredning når nivået til forurensingen er gitt for galaksehopenene. Disse blir også tatt med i usikkerheten til målingene av massene.

Det blir til sammen gitt en spredning på 26 % på usikkerheten til de linsede massene selv om spredninger på (0.26, 0.13, 0) alle gir svake effekter på sluttresultatet. Dette kommer av at usikkerheten i målingene til "kosmisk shear" dominerer feilene i de fleste galaksehopenene.

7.2.3 Masse-røntgenstråling forholdet

Den observerte spredningen rundt forholdet til $M_{180c} - L_X$ forårsaker en ufullstendig masseavhengighet i målingene spesielt på galaksehoper med lav masse. For å få en fullstendighet av målingene som en funksjon av M_{180c} blir en relasjon mellom $M_{180c} - L_X$ og spredningen bestemt empirisk i [1]. Når en i tillegg tar med spredningen som kommer fra usikkerheten i massemålingene rundt denne relasjonen får en spredningen $\sigma_M = 0.44$.

For en galaksehope med masse M_{180c} er sannsynligheten for å bli inkludert i målingene gitt som

$$P(M_{180c}) = \int_{-\infty}^{M_{180c}} P_{\delta M_L}(M - M_M(L_{min}))dM, \quad (7.2.7)$$

hvor $P_{\delta M_L}$ er sannsynlighetsfordelingen til M_{180c} for en gitt røntgenstrålingsluminositet. $M(L_{min})$ er massen som korresponderer til galaksehoper med minimum røntgenstrålingsluminositet. $P_{\delta M_L}$ blir antatt å være en log-normal funksjon, hvor et standard avvik på $\sigma_{logM} = 0.178$ blir gitt ut fra dataene i [1]. Den eksakte formen av $P_{\delta M_L}$ kan muligens bli funnet empirisk i fremtiden ved bruk av et større datasett av røntgenstrålingsluminositet av galaksehoper, og med en mer nøyaktig bestemmelse av linsede masser.

7.2.4 Måleusikkerheter

Usikkerhetene kommer både fra usikkerheten av målingene til observasjonene og spredning i observasjonens masserelasjon forutsaket av projeksjonseffekter. Usikkerheten i målingene til [1] varierer fra galaksehop til galaksehop. Dette betyr at massefunksjonen blir påvirket av usikkerheter i hver galaksehop. Gitt en teoretisk massefunksjon $n_{th}(M_{180c})$, og disse totale usikkerhetene, blir en observert massefunksjon gitt som

$$n_{obs}(M_{180c}) = \langle \int d\delta M_{180c} P(\delta M_{180c}) n_{th}(M_{180c} + \delta M_{180c}) P(M_{180c}) \rangle. \quad (7.2.8)$$

$P(\delta M_{180c})$ er en log-normal sannsynlighetsfordeling med bredde gitt av målingsusikkerheter i M_{180} , og gjennomsnittet blir tatt over spredningen av de observerte usikkerhetene $\sigma_{M_{180c}}$.

7.2.5 Tilpasse data til forutsatt massefunksjon

Dataene fra galaksehopenmålingene blir i [1] tilpasset to massefunksjonsformer, en som er basert på analytisk arbeid [26] og en basert på nylige simuleringer [28]. Ved å bruke tilpassingsfunksjonene i [29] blir disse massefunksjonene konvertert til M_{180c} . For å lett sammenlikne mellom teori og observasjoner blir den teoretiske massefunksjonen delt opp, slik at det teoretiske antallet galaksehopar i et gitt område er gitt som

$$N_i = V_{BCS} \int_{m_{i,1}}^{m_{i,2}} \frac{dn}{dM} dM, \quad (7.2.9)$$

hvor V_{BCS} er målingsområdet. For de teoretiske massefunksjonene blir antallet observerte galaksehopar i fire masseområder beregnet. Til slutt blir bare de tre høyeste masseområdene brukt ettersom usikkerheten i de laveste områdene er veldig stor. Når [1] tilpasser de observerte dataene til den teoretiske massefunksjonen til [26], finner en

$$\sigma_8(\Omega_m/0.3)^{0.37} = 0.67^{+0.04}_{-0.05} \quad (7.2.10)$$

der usikkerheten svarer til et 68%-konfidensintervall. Dataene fra dette resultatet vil jeg jobbe videre med i denne oppgaven.

7.3 Massefunksjonen og WMAP

Ved å bruke massefunksjonen fra gravitasjonslensing får vi gode beregninger på nøytrinomassen og de andre parametrene. Grunnen er at denne ikke tar hensyn til antagelser av egenskapene til luminositetsmaterie i forhold til mørk materie. Den er derfor fri for antagelser om forholdet mellom klumping av mørk og baryonsk materie, og er derfor bedre å bruke enn andre datasett som blant annet blir vist i [22].

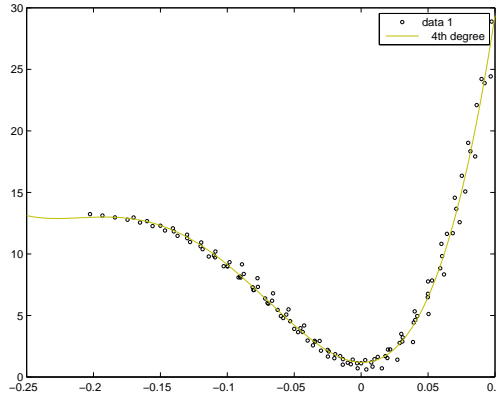
Jeg vil i dette avsnittet bruke Haakon Dahles data fra [1] til å uttrykke χ^2 , og bruke dette uttrykket sammen med WMAP målingene for å finne gode begrensninger på de forskjellige parametrene.

7.3.1 Uttrykke χ^2 ut fra Håkon Dahles data

Jeg vet fra kapittel 5 at χ^2 er et mål på hvor godt en gitt modell beskriver dataene. Ved å bruke (7.2.10) kan en finne et uttrykk for χ^2 ut fra Haakon Dahles målinger i [1]. Jeg begynner med å uttrykke σ_8 og Ω_m som $u = \sigma_8(\Omega_m/0.3)^{0.37} - 0.67$. Deretter plotter jeg u mot χ^2 verdiene fått fra [1] med punktplot i maltab og prøver å finne en funksjon som beskriver disse punktene best mulig. Koden jeg laget for dette er vist i Appendix A. Ved å ekskludere data av Ω_m og σ_8 som ligger utenfor øvre og nedre grense i 5 - 95 % konfidensintervall fra målingene med WMAP blir jeg kvitt en del overflødig data. Samtidig er det lite sannsynlig for at χ^2 har en veldig høy verdi slik at jeg begrenser meg til verdier av χ^2 som ligger under 25. Da får jeg en fordeling av punktene som vist på figur 7.2. Jeg tilpasser disse punktene en best mulig passende funksjon og får følgende resultat

$$\chi^2 = 18745u^4 + 10448u^3 + 1618.3u^2 - 3.2645u + 1.1899. \quad (7.3.1)$$

Dette resultatet er konsistent med det som ble funnet i [22].



Figur 7.2: Fordeling av χ^2 vs u .

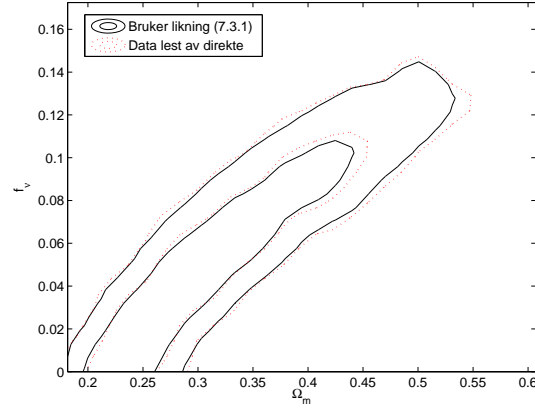
7.3.2 Numeriske resultat

Jeg vil nå bruke Håkon Dahles data fra [1] sammen med dataene fått fra mine kjøringene med WMAP-målingene i CosmoMC, til å beregne parametre og se hvilke forbedringer dette gir. Først leser jeg dataene til [1] av direkte og deretter bruker jeg (7.3.1) til å oppdatere dataene jeg fikk fra kjøringene med WMAP. Grunnen til dette er for å se om likning (7.3.1) holder mål.

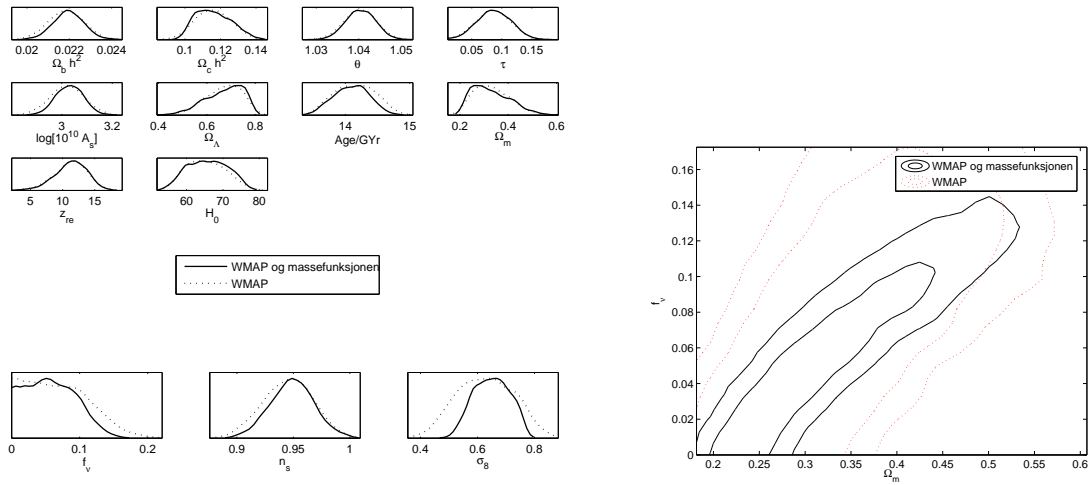
I datasettet til Håkon Dahle er det gitt en χ^2 verdi for gitte verdier av σ_8 og Ω_m . Det jeg gjør når jeg leser av disse dataene direkte er å lage et program i C++ som sammenlikner disse σ_8 og Ω_m verdiene med verdiene i datasettet fått fra WMAP-kjøringene i CosmoMC. For hver σ_8 og Ω_m verdi får jeg en χ^2 verdi fra Håkon Dahles data. Denne χ^2 verdien bruker jeg til å oppdatere likelihoodverdien i datasettet fra WMAP-kjøringene. Jeg vil da få nye fordelinger på parametrene hvor jeg i prinsippet har med WMAP-målingene og massefunksjonen fra svak linsing. Koden jeg laget til dette er vist i Appendix B

Når jeg bruker likning (7.3.1) sammen med WMAP-dataene får jeg en χ^2 verdi for hver σ_8 og Ω_m fått fra kjøringene med WMAP-målingene i CosmoMC. Denne verdien bruker jeg til å oppdatere likelihoodverdiene med. Et eksempel på en kode til dette formålet er gitt i Appendix C. En ser av figur 7.3 at likning (7.3.1) beskriver Håkon Dahles data godt. Det vil si at ved å bruke denne likningen på datasettet fra WMAP-kjøringene, har jeg parameterberegninger ut fra WMAP-målingene og massefunksjonen fra svak linsing. Ved å bruke (7.3.1) får jeg fordelingen av de forskjellige parametrene vist i figur 7.4.

Det første som er interessant å se på figuren er spektralindeksen n_s . Jeg ser at n_s verdien blir litt større med en mindre usikkerhet i forhold til da jeg kjørte CosmoMC med bare WMAP-målingene. Dette kommer av at storskalastrukturen har perturbasjoner på skalaer som er mye mindre enn horisonten og vil da ikke påvirke n_s . Dette er bra siden jeg nå har et sett med målinger som beskriver nøytrinomassen uten å bli påvirket av n_s , og en kan da skille effekten fra disse to parametrene mer effektivt. Dette vil også føre til at begrensingene på de andre parametrene blir bedre som jeg ser av figur (7.4). Effekten nøytrinoer har på storskalastrukturen er at de jevner ut perturbasjoner. Til større masse de har jo større effekt vil de ha på utjevningen. Dette kommer av "free-streaming" som jeg har snakket om før i



Figur 7.3: Konturplot for forholdet mellom f_ν og Ω_m for tilfellet når dataene blir lest inn direkte og når en bruker likning 7.3.1.



Figur 7.4: Figurene viser kjøringene med WMAP-dataene og med WMAP-dataene sammen med massefunksjonen. På figuren til venstre ser vi fordelingen til de forskjellige parametrene. På figuren til høyre ser vi forholdet mellom f_ν og Ω_m i 95 og 68 % konfidensintervall.

	f_ν	M_ν	σ_8	n_s
WMAP	< 0.148	$< 2.00 \text{ eV}$	$0.628^{+0.107}_{-0.104}$	$0.945^{+0.022}_{-0.022}$
WMAP og massefunksjon	< 0.121	$< 1.68 \text{ eV}$	$0.649^{+0.066}_{-0.069}$	$0.949^{+0.019}_{-0.020}$

Tabell 7.1: Resultat for utvalgte parametre. De gitte verdiene er gjennomsnittelig verdier for sannsynlighetsfordelingen. Feilen er gitt ved 68 % konfidensintervall. Grensen til nøytrinomassen er gitt ved 95 % konfidensintervall.

oppgaven. Jeg har summert verdiene til noen utvalgte parametre i tabell 7.1.

Nøytrinoene får nå en øvre grense på $f_\nu < 0.121$ i 95% konfidensintervallet som tilsvarer en sum av nøytrinomassene på $M_\nu < 1.68 \text{ eV}$. Dette er en forbedring fra da jeg bare hadde med WMAP som gav $f_\nu < 0.148$ tilsvarende $M_\nu < 2.00 \text{ eV}$. Forholdet mellom f_ν og Ω_m på konturplottet i figur 7.4 er betraktelig bedre når massefunksjonen er med i beregningene.

Det er også interessant å se på σ_8 . Forskjellige kombinasjoner av parametre kan gi nesten identiske CMB-spekter. Derfor vil ikke CMB-spekteret alene gi gode begrensninger på σ_8 , men ved å ta med massefunksjonen for galaksehoper får vi en mye bedre indikasjon på hvordan massen er fordelt i universet idag, og σ_8 blir da selvfølgelig bedre begrenset. Dette ser jeg tydelig på figur 7.4.

7.4 Forbedre massefunksjonen

I fremtiden vil vi få mer data å forholde oss til samtidig som målingene blir mer nøyaktige. Dette vil føre til at bestemmelsen av massefunksjonen også vil bli bedre. Jeg vil nå gå igjennom hva dette innebærer rent matematisk, før jeg ser på hva vi kan forvente oss av massefunksjonen når vi får mer observert data som er mer nøyaktige.

7.4.1 Matematisk

En forbedret massefunksjon vil matematisk føre til at u verdiene i likning (7.3.1) vil ligge innenfor et mindre område og fordelingen av χ^2 og u som sett i figur 7.2 vil bli innskrenket. Ut fra figur 7.2 ser jeg at dette vil føre til at stigningstallet til (7.3.1) vil få en høyere positiv verdi for $u < 0$, og en lavere negativ verdi for $u > 0$. Vi kan skrive (7.3.1) som

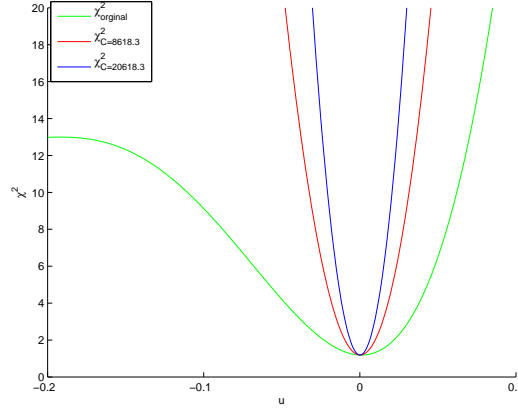
$$\chi^2 = Au^4 + Bu^3 + Cu^2 + Du + E. \quad (7.4.1)$$

Ved å derivere denne får jeg

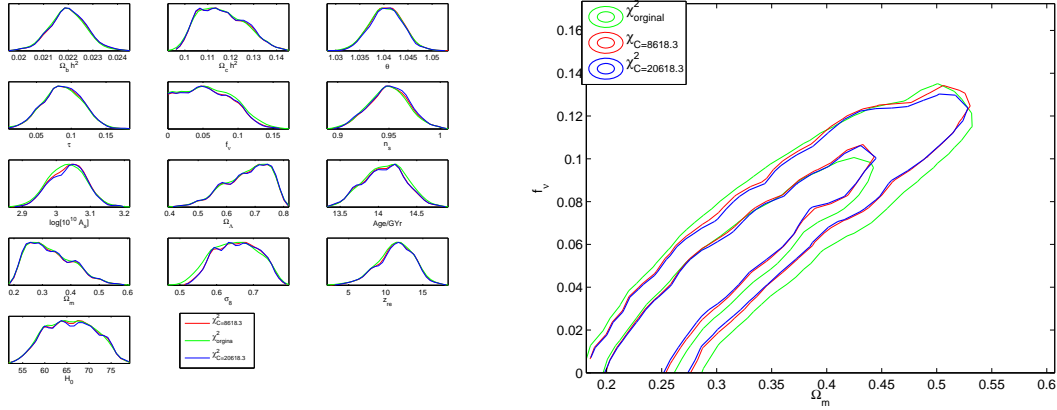
$$(\chi^2)' = 4Au^3 + 3Bu^2 + 2Cu + D. \quad (7.4.2)$$

Jeg ser av (7.4.2) at stigningstallet går mot en høyere verdi desto større verdi B og/eller D har uavhengig av u. Dette betyr at en ikke får noen forbedring av fordelingen ved å forandre på disse ettersom venstre del av kurven, $u < 0$, vil slake ut siden det negative stigningstallet går mot null. Ved å gi C og/eller A høyere verdier vil stigningstallet få en høyere positiv verdi for $u > 0$, og en lavere negativ verdi for $u < 0$ som er akkurat det vi er ute etter. Forandringer av C vil gjøre mest utslag ettersom u verdiene ligger mellom -0.2 og 0.1 . Jeg øker C først til $C = 8618.3$ og deretter til $C = 20618.3$ slik at jeg får følgende funksjoner

$$\chi_{C=8618.3}^2 = 18745u^4 + 10448u^3 + 8618.3u^2 - 3.2645u + 1.1899, \quad (7.4.3)$$



Figur 7.5: Forbedringer av massefunksjonen.



Figur 7.6: Konturplot og fordeling av parametre med forbedringer av massefunksjonen.

$$\chi^2_{C=20618.3} = 18745u^4 + 10448u^3 + 20618.3u^2 - 3.2645u + 1.1899. \quad (7.4.4)$$

Jeg plottet fordelingene i figur 7.5 hvor jeg sammenliknet disse med den originale fordelingen jeg har i (7.3.1) som jeg kaller $\chi^2_{original}$. Jeg kjørte så CosmoMC med disse nye funksjonene. De forskjellige parameterfordelingene i tillegg til konturplot for f_ν vs Ω_m er gitt i figur 7.6.

Som forventet får vi en litt mer nøyaktig beregning av σ_8 og f_ν . f_ν får nå en øvre grense på $f_\nu < 0.115$ for $\chi^2_{C=8618}$ og $f_\nu < 0.114$ for $\chi^2_{C=20618.3}$ innenfor 95 % konfidensintervallet, i forhold til $f_\nu < 0.121$ fra $\chi^2_{original}$. Spektralindeksen blir $n_s = 0.95^{+0.19}_{-0.19}$ for begge tilfellene.

Ved å sette enda høyere C verdier i massefunksjonen kan en få mye mer nøyaktige grenser for u verdiene og da enda lavere grense for f_ν . Men med mine data kom jeg bort i et problem da jeg prøvde å sette en høyere verdi for C . Fordelingene til de forskjellige parameterene ble veldig stygge for disse C verdiene. Dette kommer av at dataene fra mine originale kjøring med WMAP blir oppdatert når jeg skal ta med massefunksjonen i mine beregninger. Ettersom χ^2 får veldig høy verdi for flere u verdier ettersom massefunksjonen blir forbedret, vil dette

føre til at et mindre antall data er sannsynlige og fordelingene blir styggere. Dette kan en omgås ved å forandre litt på fortran koden i CosmoMC og kjøre MonteCarlo løkker på ny ved å ta med både WMAP og massefunksjonen.

Nå har jeg gått igjennom hvordan massefunksjonen rent matematisk kan bli forbedret. Men hva kan vi egentlig forvente oss av massefunksjonen når vi får mer observert data som er mer nøyaktig? Det skal jeg se på nå i neste avsnitt.

7.4.2 Håkon Dahles simulering av en forbedret massefunksjon

Håkon Dahle simulerte nye observerte data til en forbedret massefunksjon. Det disse simuleringene gjorde var å simulere observasjoner ut fra en gitt universmodell. Han gikk ut fra at galaksehopen ble valgt ut fra røntgenstrålingsluminositeten over en gitt grense. Denne grensen vil da korrespondere til en massegrense.

Videre gikk han ut fra at galaksehopen ble funnet i et volum i området $z = 0.15 - 0.7$ i den nordlige himmelhalvkule $\delta > 0^\circ$, opp til en sone med den galaktiske breddegraden $|b| < 20^\circ$. Dette er tilnærmet volumet brukt i observasjonene til [33] og [34]. Metoden som Håkon Dahle brukte på disse simuleringene er lik prosedyren brukt i [1], og som jeg har beskrevet i avsnitt 7.2.

Det ble først antatt en målingsusikkerhet i galaksehopenmassen på $\sigma_{\log M}$. Den teoretiske massefunksjonen ble så utformet med en sannsynlighetsfordeling med bredde gitt av denne usikkerheten for å forutse den observerte massefunksjonen.

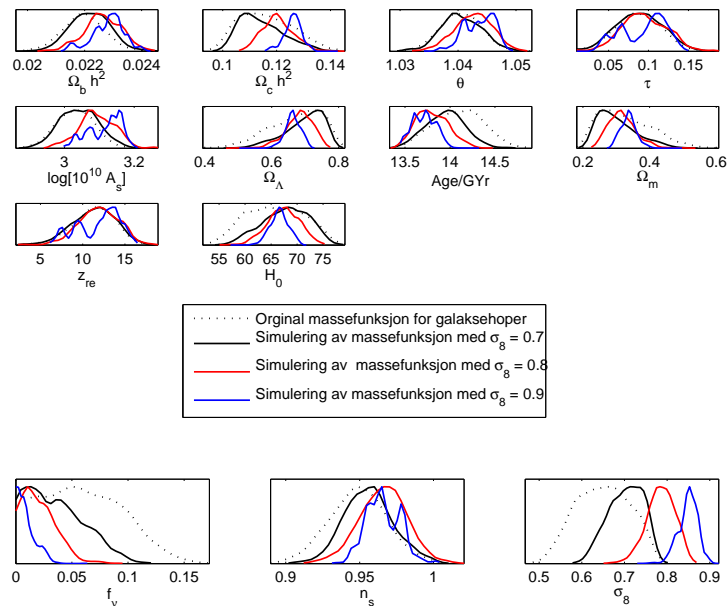
Han antok også en spredning i relasjonen til masse-røntgenstrålingluminositeten på $\sigma_{\log M} = 0.178$. Denne ble brukt til å beregne sannsynligheten for å inkludere en galaksehop i målingene som en funksjon av den virkelige galaksehopenmassen. Massefunksjonen funnet i [26] ble videre brukt til å finne den observerte massefunksjonen, slik som i likning (7.2.9). Forskjellen er at usikkerheten ble satt til konstant for alle galaksehoper, slik at en slipper å ta et gjennomsnitt av en samling av observerte usikkerheter. Deretter ble massefunksjonen beregnet ved fire rødforskyvninger ($z = 0.1875$), ($z = 0.2625$), ($z = 0.4$), og ($z = 0.6$). Dette betyr at de antatte galaksehopenmålingene blir splittet til fire rødforskyvningsintervaller ($0.15 < z < 0.225$, $0.225 < z < 0.3$, $0.3 < z < 0.5$ og $0.5 < z < 0.7$). Han gikk videre ut fra at massefunksjonen innenfor hvert rødforskyvningsområde er representert av massefunksjonen beregnet ved den gjennomsnittelige rødforskyvningen $(z_{max} + z_{min})/2$ i området.

Håkon Dahle brukte så forskjellige modeller med $\Omega_m = 1 - \Omega_\Lambda = 0.7$ i sine simuleringer. For hver av disse modellene ble det satt en nedre massegrense ved å anta at det totale observasjonsområdet består av de 70 mest massive galaksehopen.

I de tre første simuleringene ble verdiene av σ_8 satt til $\sigma_8 = 0.7, 0.8, 0.9$. Ut fra disse modellene fikk han antatte observasjoner av σ_8 og Ω_m verdier med gitte χ^2 verdier. Jeg brukte disse dataene sammen med dataene fra kjøringene med WMAP, for å se hvilken innvirkning denne forbedrede massefunksjonen for galaksehopen hadde på de forskjellige parametrene. Teknikken jeg bruker for å gjøre dette er den samme som jeg brukte da jeg leste av data direkte fra det originale datasettet til Håkon Dahle som er beskrevet i avsnitt 7.3.1. Resultatene ser en i figur 7.7.

En ser at fordelingene til de forskjellige parametrene blir forskjøvet etter hvilken verdi σ_8 har i simuleringene. Spesielt ser en effekten av at nøytrinomassen vil bli mindre når σ_8 verdien blir større. Dette vil igjen føre til en høyere verdi på spektralindeksen n_s . I tabell 7.2 ser en hvilke verdier jeg får for disse parametrene.

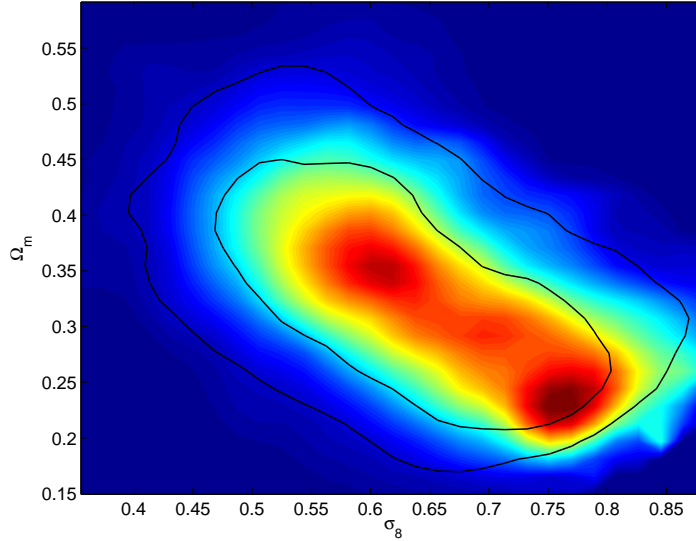
Figur 7.8 viser verdiene til σ_8 og Ω_m med WMAP-kjøringene. Siden vi bruker de nye



Figur 7.7: Beregningene av de forskjellige parametrene i CosmoMC med de nye simulerte dataene til Håkon Dahle.

	Orginal massefunksjon	$\sigma_8 = 0.7$	$\sigma_8 = 0.8$	$\sigma_8 = 0.9$
M_ν	$< 1.68\text{eV}$	$< 1.08\text{eV}$	$< 0.613\text{eV}$	$< 0.334\text{eV}$
n_s	$0.949^{+0.019}_{-0.020}$	$0.956^{+0.016}_{-0.016}$	$0.966^{+0.015}_{-0.016}$	$0.966^{+0.013}_{-0.012}$

Tabell 7.2: Resultat for nøytrinomassen og spektralindeksen for de forskjellige simuleringene. De gitte verdiene er gjennomsnittelig verdier for sannsynlighetsfordelingen. Feilen er gitt ved 68 % konfidensintervall for spektralindeksen. Grensen til nøytrinomassen er ved 95% konfidensintervall.

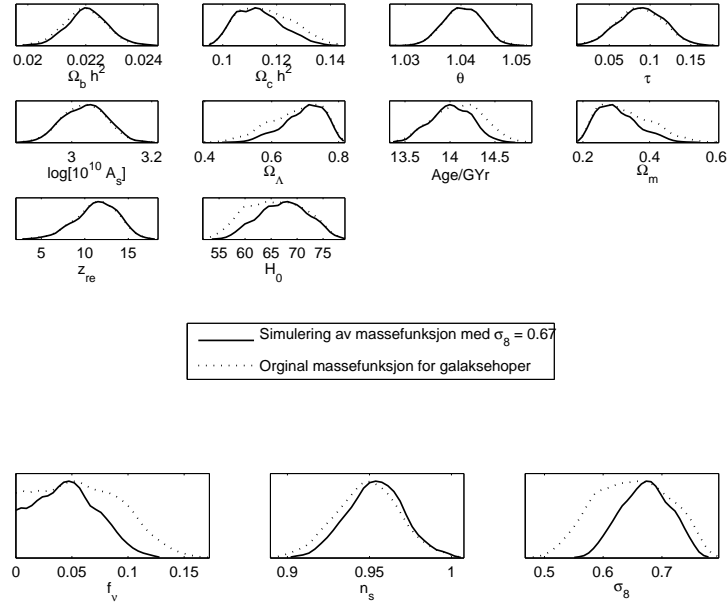


Figur 7.8: Beregninger av σ_8 og Ω_m med WMAP-kjøringene innenfor 95 og 65 % konfidensintervallet.

dataene fra de nye simuleringene på denne kjøringen, som beregner en σ_8 verdi på rundt $0.628^{+0.107}_{-0.069}$, kan dette gjøre at fordelingen til de forskjellige parametrene automatisk vil bli innskrenket til et mindre område. Dette kommer av at vi nå vil befinne oss ved halen til likelihoodverdiene. Vi ser spesielt denne effekten av dataene fra $\sigma_8 = 0.9$ i figur 7.7 hvor fordelingen blir veldig hakkete. Dette betyr at en muligens ikke vil få noen indikasjon på hvordan vi kan forvente oss at parametrene vil se ut i fremtiden ut fra simuleringene med disse σ_8 verdiene.

Men ved å simulere kjøringer rundt en σ_8 verdi som er mer konsistent med verdien fått av WMAP-dataene, er det kanskje mulig å få en beregning på de forskjellige parametrene som har mer rot i virkeligheten. Håkon Dahle kjørte en ny simulering hvor han antok en $\sigma_8 = 0.67$ som var den samme best-fit verdien til σ_8 funnet i [1]. Jeg brukte disse nye dataene til å beregne parametrene og sammenliknet disse med den originale massefunksjonen. Resultatene ser en i figur 7.9. Begrensningene til de forskjellige parametrene er tydelig bedre i forhold til den originale massefunksjonen. Som en ser er σ_8 verdien fint plassert innenfor konfidensintervallet fra beregningene fra den originale massefunksjonen. Derfor er disse beregningene mer konsistent med det vi kan forvente oss i fremtiden enn de beregningene jeg fikk fra simuleringene med de andre σ_8 verdiene over.

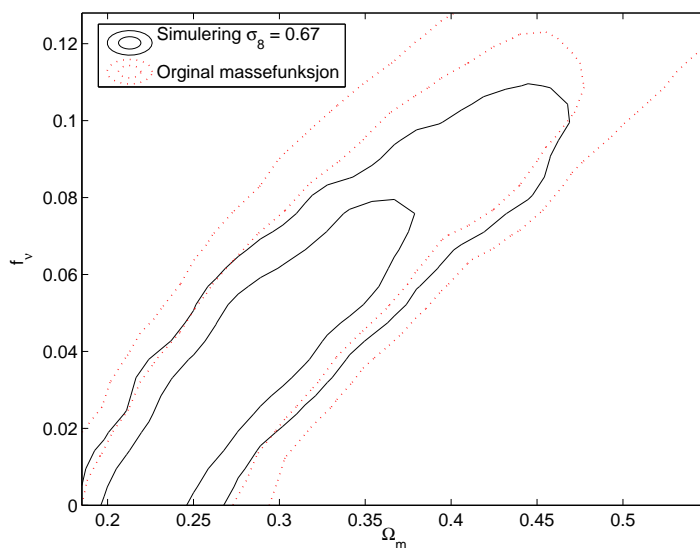
Jeg har oppsummert resultatene fra beregningene til spektralindeksen n_s og summen av nøytrinomassene M_ν i tabell 7.3, hvor jeg sammenlikner med den originale massefunksjonen. Spektralindeksen blir en tanke større med en bedre sikkerhet samtidig som nøytrinomassen blir mindre. Usikkerheten til n_s er omtrent lik det jeg fikk i beregningen fra kjøringen med WMAP der nøytrinoene var masseløse. Det vil si at jeg med disse simuleringene omtrent har fått en like sikker beregning på spektralindeksen som det jeg hadde når nøytrinoene ikke hadde masse. I figur 7.10 ser en hvor mye bedre nøytrinomassen blir begrenset. Området massen ligger innenfor er mindre enn hva vi hadde fra den originale massefunksjonen.



Figur 7.9: Beregninger av de forskjellige parametrene med simuleringer med en antatt verdi $\sigma_8 = 0.67$ sammenliknet med kjøring med orginal massefunksjon.

	M_ν	n_s
Orginal massefunksjon	$< 1.68\text{eV}$	$0.949^{+0.019}_{-0.020}$
Simuleringer med $\sigma_8 = 0.67$	$< 1.22\text{eV}$	$0.954^{+0.016}_{-0.018}$

Tabell 7.3: Resultat for nøytrinomassen og spektralindeksen for simuleringen med $\sigma_8 = 0.67$. De gitte verdiene er gjennomsnittelig verdier for sannsynlighetsfordelingen. Feilen er gitt ved 68 % konfidensintervall for spektralindeksen. Grensen til nøytrinomassen er ved 95% konfidensintervall.



Figur 7.10: Beregning av f_ν vs Ω_m innenfor 95% konfidensintervallet med simuleringer med en antatt verdi $\sigma_8 = 0.67$ og den originale massefunksjonen.

Selv om disse parametrene blir bedre bestemt skulle en nok ønsket at parametrene ble enda mer begrenset. Håkon Dahle prøvde også å kjøre simuleringene med mer optimistiske antagelser om usikkerheten i massebestemmelsen for hver galaksehopp. Disse dataene gav ikke noe tydelige utslag på beregningene. Ved å utvide observasjonsområdet til en enda høyere rødforskyvning, og ved å anta en mye mindre spredning i relasjonen til masse-røntgenstrålingsluminositeten, er det nok mulig å få enda bedre bestemmelse av massefunksjonen. Hvor mye bedre denne blir ut fra observasjoner vil bare fremtiden kunne vise.

Kapittel 8

Oppsummering

Jeg har nå kombinert WMAP-dataene for temperaturvariasjoner i bakgrunnstrålingen med Håkon Dahles bestemmelse av massefunksjonen for galaksehoper for å bestemme nøytrino-massegrenser og andre kosmologiske parametre.

Først såg jeg på målingene som ligger til grunn for at nøytrinoene har masse og hvorfor kosmologi er et godt redskap for å begrense summen av den absolutte nøytrinomassen.

Selv om nøytrinoene har liten masse er de tallrike i universet vårt og påvirker derfor de andre parametrene. Effekten av nøytrinoene blir først og fremst sett i materie-styrkespekteret. Siden de har liten masse og høy hastighet vil de utjevne perturbasjoner på små skalaer på grunn av "free-streaming". Utjevningen øker proporsjonalt med nøytrinomassen, hvor skalaene som utjevningen begynner på blir redusert jo større masse nøytrinoene har. Ved å analysere denne effekten kan en finne øvre grenser for M_ν . For å finne slike grenser er det viktig å vite hvordan materie-styrkespekteret ser ut når nøytrinoene er masseløse. Det betyr at det er viktig å ha gode beregninger på de andre parametrene fått ut fra andre datasett enn LSS.

Den gode kvaliteten av CMB-styrkespekteret gjør at det er veldig verdifullt for å beregne parametre. Derfor brukte jeg WMAP-datasettet som et utgangspunkt for mine beregninger. Spesielt fikk jeg verdifull informasjon av blant annet spektralindeksen som er direkte relatert til slow-roll parametrene i inflasjonfasen. Ved å kombinere WMAP-datasettet med et gitt datasett av LSS, nemlig Håkon Dahles bestemmelse av massefunksjonen til galaksehoper ved bruk av svak gravitasjonslensing [1], fikk jeg gode begrensninger av de forskjellige parametrene med minst mulige antagelser.

Ved å bruke svak gravitasjonslensing slipper en å ta hensyn til hvordan baryonsk materie klumper seg relativt til mørk materie, og en begrenser antagelsene til et minimum. Når jeg kombinerte disse dataene med WMAP fikk jeg skilt ut effekten av spektralindeksen på CMB-styrkespekteret siden materie-styrkespekteret er følsom for nøytrinomassen. Dermed ble beregningene på nøytrinomassen og spektralindeksen bedre. σ_8 er også direkte relatert til materie-styrkespekteret slik at beregningene til denne også ble forbedret.

Jeg såg til slutt på hvordan en eventuelt bedre bestemmelse av massefunksjonen ville påvirke de forskjellige parametrene. Ved å simulere observasjoner av galaksehoper på høyere rødforskyvning med mindre usikkerhet fikk jeg nye datasett å jobbe med. Her fant jeg ut at simuleringen rundt best-fit verdien til [1] på $\sigma_8 = 0.67$ var de beste dataene å jobbe med når jeg skulle se på hvordan en forbedret massefunksjon ville påvirke parametrene. Ved å bruke disse dataene såg jeg at parametrene ble bedre begrenset. Den øvre grensen på summen av nøytrinomassene ble $\frac{M_{\nu \text{ forbedret}}}{M_{\nu \text{ original}}} = \frac{1.22\text{eV}}{1.68\text{eV}} = 0.73 = 73\%$ mindre. Spektralindeksen n_s

ble begrenset til et intervall som tilsvarer $\frac{\text{Området } n_s \text{ forbedret}}{\text{Området } n_s \text{ original}} = \frac{0.016+0.018}{0.019+0.020} = 0.87 = 87\%$ av området fra beregninger med den originale massefunksjonen.

En skulle selvfølgelig ønsket at en kunne få enda bedre føringer, spesielt på n_s og M_ν . For å få signifikant sterkere føringer på disse parametrene må nok massefunksjonen til galaksehopen bli betydelig bedre bestemt. Fremtiden vil vise hvor mye mer nøyaktig denne bestemmelsen blir. Når en får utvidet observasjonene til høyere rødforskyvninger samtidig som målingene blir mer nøyaktige, vil massefunksjonen stadig bli bedre. Spesielt vil et bedre forhold på relasjonen til masse-røntgenstrålingsluminositeten gjøre at målingene på galaksehopen blir mer tilfredstillende. Ved å finne en mer eksakt form av $P_{\delta M_L}$ i likning (7.2.7) empirisk, ved bruk av større datasett av røntgenstrålingsluminositeten av galaksehoper, og med en mer nøyaktig bestemmelse av linsede masser, kan massefunksjonen bli kraftig forbedret. En rekke nye generasjoner teleskop vil i løpet av de neste årene stå klare for å skaffe oss mer opplysninger om det fjerne univers. Siden massefunksjonen for galaksehoper funnet fra svak gravitasjonslinsing er såpass gode og sikre mål på storskalastrukturen, har disse målingene alle forutsetninger til å bli like viktige og kanskje like sikre som WMAP-målingene er i kosmologien idag.

Til slutt vil jeg bare referere til figur 7.10 som viser hvor godt massen til nøytrinoene blir bestemt ved hjelp av en forbedret massefunksjon funnet fra simuleringene til Håkon Dahle, med $\sigma_8 = 0.67$. Denne blir sammenliknet med den originale massefunksjonen funnet fra Håkon Dahles originale observasjoner i [1]. Ved hjelp av nye observasjoner og bedre instrumenter får vi håpe at vi når denne grensen ikke så langt inn i fremtiden, og fra der fortsetter å få sterkere føringer på de forskjellige parametrene ved at massefunksjonen blir forbedret.

Appendix A

Matlab kode for punktplot av data

```
load sigma87.dat;

a = sigma87(:,2);
teller = 1;
a1 = [51];

% Legger dataene til Omega_m i en array
for x=1:51
    a1(x) = a(teller);
    teller = teller + 60;
end

b = sigma87(:,1);
b1= [60];

% Legger dataene til Sigma_8 i en array
for y=1:60
    b1(y) = b(y);    %sigma
end
teller = 1;
c1 = sigma87(:,3);

% Legger Chi verdiene inn i en matrise
for y=1:51
    for x=1:60
        tot(y,x) = c1(teller);
        teller=teller+1;
    end
end

% Tar med aktuelle data for punktplott
teller = 1;
```

```

for x =1:3060
    if c1(x)<30
        if b(x) > 0.683
            if b(x) <0.718
                if a(x) > 0.238
                    if a(x) < 0.415
                        p = b(x)*(a(x)/0.3)^0.3 - 0.7;
                        u(teller) = p;
                        q(teller) = c1(x);
                        teller=teller+1;

                    end
                end
            end
        end
    end
end

% Plotter

plot(u,q,'ko','MarkerSize',3);

clear u;
clear q;
clear c1;
clear a;
clear b;
clear a1;
clear b1;

```

Appendix B

c++ kode for å oppdatere datafiler ved å lese av data direkte

```
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <iostream>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <cmath>
#include <iomanip>
using namespace std;

int main(void)
{

    double b;
    int length;
    int teller =0;

    //Teller lengden på arrayen jeg skal bruke
    ifstream file ("test_1.txt");
    while(file!=NULL){
        file>>b;
        teller = teller+1;
    }
    length = (teller - 1)/22;
    cout<<length <<endl;

    //Deklarer arrayer til utregning
    double a[22][length];
    double hi[length];
    double resultat[22][length];

    // Leser fra Cosmomc filen
```

```

ifstream a_file ("test_1.txt");
for(int x =0; x<length; x++){
    for(int y =0; y<22; y++){
        a_file>> a[y][x];
    }
}

//Leser fra dahle filen
double dahle[4][660];
ifstream c_file ("finergrid.dat");
for(int x=0;x<660;x++){
    for(int y =0;y<4; y++){
        c_file>>dahle[y][x];
    }
}

// Test for å sjekke hvilke hi vi skal bruke
float verdi;
float melloma,mellom_a;
float mellomb,mellom_b;
float mellomc,mellom_c;
float mellomd,mellom_d;
float avrundet_sig,avrundet_om;
int teller_to=0,teller_tre=0,teller_fire = 0,teller_fem=0;
for(int x=0;x<length;x++) {
    verdi = a[18][x];
    melloma = verdi * 100;
    mellomb = melloma + 0.5;
    mellomc = int(mellomb);
    mellomd = float(mellomc);
    avrundet_sig = mellomd/100;

    mellom_a = a[17][x]/0.05;
    mellom_b = mellom_a+0.5;
    mellom_c = int(mellom_b);
    mellom_d = mellom_c*5;
    avrundet_om = mellom_d/100;
    cout<<avrundet_sig<<endl;
    cout<<avrundet_om<<endl;
    if(avrundet_sig < 0.5) {
        for(int i=0;i<660;i++) {
            if(dahle[0][i] >= 0.5-0.001 && dahle[0][i] <= 0.5+0.001) {
if(dahle[1][i]>= avrundet_om-0.001 && dahle[1][i] <= avrundet_om +0.001) {
                hi[x] = dahle[2][i];
                teller_tre = teller_tre+1;
            }
        }
    }
}

```



```

    }
}
    }
}
    else if(avrundet_om > 0.6) {
        if(avrundet_sig >1.09) {
for(int i=0;i<660;i++) {
    if(dahle[0][i]>=1.09-0.001 && dahle[0][i] <=1.09+0.001){
        if(dahle[1][i]>=0.6-0.001 && dahle[1][i]<=0.6+0.001) {
            hi[x] = dahle[2][i];
            teller_fem = teller_fem+1;
        }
    }
}
        }
        else{
for(int i=0;i<660;i++){
    if(dahle[1][i]>=0.6-0.001 && dahle[1][i]<=0.6+0.001){
        if(dahle[0][i]>=avrundet_sig-0.001 && dahle[0][i]<=avrundet_sig +0.001){
            hi[x] = dahle[2][i];
            teller_fire = teller_fire + 1;
        }
    }
}
        }
        }
        else{
            for(int i=0;i<660;i++) {
if(dahle[0][i] >= avrundet_sig-0.001 && dahle[0][i] <= avrundet_sig+0.001 ) {
    if(dahle[1][i]>= avrundet_om-0.001 && dahle[1][i] <= avrundet_om+0.001) {
        hi[x] = dahle[2][i];
        teller_to = teller_to+1;
    }
}
            }
        }
    }

    cout<<teller_fem<<endl;
    cout<<teller_fire<<endl;
    cout<<teller_to<<endl;
    cout<<teller_tre<<endl;
    cout<<length<<endl;
    //Legger de nye resultatne sammen med hi minus log likelihood til ny array

    for(int x=0;x<length;x++){

```

```

        for(int y=0;y<22;y++){
            resultat[y][x] = a[y][x];
        }
    }
    for(int x=0;x<length;x++) {
        resultat[1][x] = a[1][x] + 0.5 * hi[x];
        resultat[0][x] = a[0][x]*exp(-hi[x]/2);
    }

    //Legger den nye arrayen med de nye resultatene i ny fil

    ofstream b_file ("direkte_8.txt");
    for(int x=0;x<length;x++){
        for(int y=0;y<22;y++){
            b_file << setiosflags(ios::showpoint | ios::uppercase);
            b_file <<"    "<<scientific<<resultat[y][x];
        }
        b_file<<"\n";
    }

    b_file.close();

}

```

Appendix C

c++ kode for å oppdatere datafiler ved hjelp av en funksjon

```
#include <iostream>
#include <fstream>
#include <iostream>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <cmath>
#include <iomanip>
using namespace std;

int main(void)
{

    double b;
    int length;
    int teller =0;

    //Teller lengden på arrayen jeg skal bruke
    ifstream file ("test_1.txt");
    while(file!=NULL){
        file>>b;
        teller = teller+1;
    }
    length = (teller - 1)/22;
    cout<<length <<endl;

    //Deklarer arrayer til utregning
    double a[22][length];
    double hi[length];
    double u[length];
    double resultat[22][length];
```

```

// Leser fra filen
ifstream a_file ("test_1.txt");
for(int x =0; x<length; x++){
    for(int y =0; y<22; y++){
        a_file>> a[y][x];
    }
}

//Regner ut fra resultatene hi(Chi)
for(int x =0; x<length; x++){
    u[x] = a[18][x]*pow((a[17][x]/0.3),(0.37)) - 0.67;
    hi[x] = 18745*pow(u[x],4.0) + 10448*pow(u[x],3.0) + 1618.3*pow(u[x],2.0) - 3.2645*u[x] + 1
}

//Legger de nye resultatne sammen med hi minus log likelihood til ny array

for(int x=0;x<length;x++){
    for(int y=0;y<22;y++){
        resultat[y][x] = a[y][x];
    }
}
for(int x=0;x<length;x++) {
    resultat[1][x] = a[1][x] + 0.5 * hi[x];
    resultat[0][x] = a[0][x]*exp(-hi[x]/2);
}

//Legger den nye arrayen med de nye resultatene i ny fil

ofstream b_file ("mu_cluster_8.txt");
for(int x=0;x<length;x++){
    for(int y=0;y<22;y++){
        b_file << setiosflags(ios::showpoint | ios::uppercase);
        b_file <<"    "<<scientific<<resultat[y][x];
    }
    b_file<<"\n";
}

b_file.close();

}

```

Bibliografi

- [1] Håkon Dahle. The Cluster Mass function from weak gravitational lensing. *Astrophys.J.*, 653:954-692, 2006.
- [2] Kai Zuber. *Neutrino Physics*. Denys Wilkinson Laboratory, University of Oxford, UK, 2004.
- [3] John A.Peacock. *Cosmological Physics*. Cambridge, 1999.
- [4] F.Mandl og G.Shaw. *Quantum Field Theory*. Wiley, 1993.
- [5] R.N Mohapatra. Physics of the neutrino mass. *New Journal of Physics*, 6(82), 2004.
- [6] K.Zuber. Experimental neutrino physics. *Int.J.Mod.Phys.*,A20:2895,2005, hep-ex/0502039.
- [7] Øyvind Grøn. *Lecture Notes on General Relativity*. Department of Physics, University of Oslo, 2006.
- [8] Scott Dodelson. *Modern Cosmology*. Elsevier, 2003.
- [9] Øystein Elgarøy. Forelesningsnotater for AST4220 - Cosmology 1.
- [10] Andrew R.Little og David H.Lyth. *Cosmological Inflation and Large – Scale Structure*.Cambridge, 2000.
- [11] William H.Kinney. Inflation: Flow, fixed points, and observables to arbitrary order in slow roll. *Phys.Rev.*, D66.083508, 2002.
- [12] G.Mangano et al.,Nucl. Phys. B729 221, 2005, hep/0506164.
- [13] Ø.Elgerøy.Forelesningsnotater for AST5220 - Kosmologisk perturbasjonsteori. Universitetet i Oslo, 2007.
- [14] Finn Ravndal. Forelesningsnotater for FYS5130 - Cosmological Physics. <http://folk.uio.no/josteirk/FYS5130/>, 2005. Fysisk institutt, Universitetet i Oslo 2005.
- [15] J.r.Kristiansen. *Massive neutrinos and cosmology*. Master thesies, Institute of Theoretical Astrophysics, 2006.
- [16] D.N.Spergel et al. Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) three year results: Implications for cosmology. 2006, astro-ph/0603449.

- [17] J.Lesgourgues og S.Pastor. Massive neutrinoes and cosmology. 2006,astro-ph/0603494.
- [18] A.Lewis og S.Bridle. Cosmological parameters from CMB and other data: a Monte-Carlo approach. *Phys.Rev.*,D66.103511, 2002, astro-ph/0205436v3.
- [19] A.Lewis, A.Challinor og A.Lasenby. Efficient computation of CMB anisotropies in closed FRW models. *Ap.J.*,538:473, 2000.
- [20] U.Seljak og M.Zaldarriaga. A line of sight integration approach to cosmic microwave background anisotropies. *Astrophys.J.*,469:437-444, 1996, astro-ph/9603033.
- [21] J.R.Rice. *Mathematical Statistics and Data Analysis*. 2nd ed. Wadsworth, 1995.
- [22] Jostein R. Kristiansen, Øystein Elgarøy og Haakon Dahle. Using the cluster mass function from weak lensing to constrain neutrino masses. *Phys.Rev.*, D75, 083510, 2007.
- [23] W.H.Press, P.Schechter, *ApJ.*, 187 425, 1974
- [24] Nick Kaiser. A new Shear Estimator for weak-lensing Observations. *Astroph.J.*,537:555-577, 1999, astro-ph/9904003.
- [25] Introduction to Gravitational Lensing. <http://www.ita.uni-heidelberg.de/~massimo/sub/glensing.html>. 2006.
- [26] R.K.Sheth og G.Tormen. Monthly notices of the royal Astronomical society, 303 119, 1999.
- [27] Julio F. Navarro, Carlos S. Frenk og Simon D.M. White. A universal density profile from hierarchical clustering, *Astroph.J.*, 490:493-508, 1997.
- [28] Michael Warren og Kevork Abazajian. Precision determination of the mass function of dark matter halos, *Astroph.J.*, 646 881, 2006.
- [29] Wayne Hu og Andrey V.Kravtsov. Sample variance considerations for cluster Surveys. *ApJ.*, 584 702, 2003.
- [30] K.Ichikawa, M.Fukugita og M.Kawasaki. Constraining neutrino masses by CMB experiments alone.*Phys.Rev.*,D71, 043001, 2005.
- [31] W.Hu, M.Fukugita, M. Zaldarriaga, og M. Tegmark. *Astrophys.J.*, 549 669, 2001.
- [32] M.Fukugita,G.C.Liu og N.Sugiyama. Limits on Neutrino Mass from cosmic Structure Formation, *Phys.Rev.Lett.*,84, 1082-1085, 2000.
- [33] Ebeling et al. The ROSAT brightest Cluster sample. astro-ph/9812394v1, 1998.
- [34] Ebeling et al. MACS: A quest for the most massive galaxy clusters in the universe. *Astroph.J.*,553:668-676, 2001.